

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

L. E. J. BROUWER, CONSTANTIN CARATHÉODORY, OTTO HÖLDER,
CARL NEUMANN, MAX NOETHER

gegenwärtig herausgegeben

VON

Felix Klein

in Göttingen

Walther v. Dyck

in München

David Hilbert

in Göttingen

Otto Blumenthal

in Aschen.

77. Band. 4. Heft.

Mit 6 Figuren im Text


Ausgegeben am 22. September 1916.



LEIPZIG,

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER.

1916.

 Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammen-
gestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre.
[XI u. 202 S.] gr. 8. geh. Mk. 7.—

Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre.

Von

DÉNES KÖNIG in Budapest.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Problemen aus der *Analysis situs*, der Determinantentheorie und der Mengenlehre. Der Begriff der *Graphen* ist dasjenige Bindeglied, durch welches diese Probleme miteinander zusammenhängen. Die durch geometrische Anschaulichkeit ausgezeichnete Methode der Graphen, die auch zur Lösung mancher hier auftretenden Fragen führt, wird nämlich die Äquivalenz von scheinbar einander fernliegenden Fragestellungen zeigen.

§ 1.

Graphen.*)

Es sei eine endliche Anzahl von Punkten gegeben; gewisse Paare, die man aus diesen Punkten auswählen kann, sollen durch eine oder mehrere (endlich viele) Kanten verbunden werden. Eine auf diese Weise entstehende Figur wird im allgemeinen als ein *Graph* bezeichnet. Ein Graph heißt (in sich) *zusammenhängend*, falls man auf seinen Kanten von irgend einem seiner Punkte**) zu jedem anderen gelangen kann. Ist der Graph nicht zusammenhängend, so zerfällt er in eindeutiger Weise in zusammenhängende Teile. In der Trivialität dieser Aussage liegt der Vorteil gewisser (algebraischer) Anwendungen der Graphen. Läuft aus jedem Punkt dieselbe Anzahl von Kanten aus, so heißt der Graph *regulär* und diese konstante Anzahl wird als der *Grad* des regulären Graphes bezeichnet. Eine ganz

*) Vgl. Petersen: „Die Theorie der regulären Graphs“, Acta Mathematica Bd. 15 (1891), S. 193—220.

**) Nur die ursprünglich angenommenen Punkte (Knotenpunkte) werden als „Punkte“ des Graphes bezeichnet.

ausgezeichnete Rolle spielen die sogenannten *paaren Graphen*; ein Graph wird so bezeichnet, falls jeder geschlossene Linienzug, der aus seinen Kanten gebildet werden kann, eine gerade Anzahl von Kanten enthält (z. B. das Kantensystem des Würfels).

Ein Graph ist dann und nur dann ein paarer Graph, wenn man seine Punkte so in zwei Gruppen zerlegen kann, daß nur Punkte verschiedener Gruppen unmittelbar (durch eine Kante) verbunden sind.

In der Tat: ist eine Teilung in zwei solche Gruppen möglich, so gehören die Punkte jedes geschlossenen Kantenzuges *abwechselnd* der einen und der anderen Gruppe an; der geschlossene Kantenzug muß also eine gerade Anzahl von Kanten enthalten. Und umgekehrt: ordnet man die Punkte, auf einem beliebigen Kantenzug fortfahrend, abwechselnd der einen oder anderen Gruppe zu, so kann dies nur dann zu einem Widerspruch führen, falls man auf einen geschlossenen Kantenzug gestoßen ist, der eine ungerade Anzahl von Kanten enthält. (Dies gilt auch für nicht zusammenhängende Graphen, nur ist hier die Einteilung der Punkte in zwei Gruppen nicht eindeutig bestimmt.)

Auf diese Weise können die „nicht zusammenhängenden“ und die „paaren“ Graphen symmetrisch zueinander definiert werden, da man die nicht zusammenhängenden Graphen auch dadurch charakterisieren kann, daß ihre Punkte so in zwei Gruppen geteilt werden können, daß nur zwei Punkte *derselben* Gruppe untereinander unmittelbar verbunden sind.

Die Gesamtheit G_k gewisser Kanten des Graphes G , wird als ein *Faktor k^{ten} Grades* von G bezeichnet, wenn von jedem Punkte von G genau k Kanten von G_k auslaufen. Ein Faktor k^{ten} Grades ist selbst ein regulärer Graph k^{ten} Grades, seine Punkte stimmen mit den Punkten des ursprünglichen Graphes überein. Gewisse Kanten von G bilden also dann einen Faktor *ersten* Grades, wenn jeder Punkt von G einmal und nur einmal als Endpunkt dieser Kanten vorkommt. Ist G regulär und n^{ten} Grades, so bilden diejenigen Kanten, die in einem Faktor k^{ten} Grades, G_k , *nicht* enthalten sind, einen Faktor $n - k^{\text{ten}}$ Grades, G_{n-k} . In diesem Falle setzt man nach Petersen:

$$G = G_k G_{n-k}.$$

Ebenso definiert man das Zerfallen eines regulären Graphes in mehr als zwei Faktoren. Stets ist die Summe der Grade der Faktoren dem Grade des ursprünglichen Graphes gleich. Im Folgenden wird besonders die Zerlegung eines regulären Graphes in Faktoren ersten Grades behandelt werden.

Jeder Graph zweiten Grades besteht aus einfachen (doppelpunktslosen) geschlossenen Linien. Dieser besitzt, wie man sieht, dann (und nur

dann) einen Faktor ersten Grades, wenn alle diese geschlossenen Linien eine gerade Anzahl von Kanten enthalten.*)

Als eine Verallgemeinerung dieser Tatsache werden wir folgenden Satz beweisen:

A) *Jeder paare reguläre Graph besitzt einen Faktor ersten Grades.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des folgenden (der jedoch nur scheinbar mehr besagt**):

B) *Jeder paare reguläre Graph k^{ten} Grades zerfällt in k Faktoren ersten Grades.*

Dieser Satz wieder ergibt sich als eine Folge des folgenden:

C) *Laufen in jedem Punkte eines paaren Graphes höchstens k Kanten zusammen, so kann man den Kanten des Graphes je einen von k Indizes auf solche Weise zuordnen, daß zwei Kanten, die in einem Punkt zusammenlaufen, stets verschiedene Indizes erhalten.*

Der Satz B) ist in der Tat eine unmittelbare Folge dieses Satzes, da im Falle eines regulären Graphes k^{ten} Grades die Kanten mit denselben Indizes je einen Faktor ersten Grades bilden.

Für den Beweis des Satzes C) wollen wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden, die, obzwar sie bei einer Beschränkung auf den Satz B) versagt, für den allgemeineren Satz C) unmittelbar zum Ziele führt. Ist die Anzahl der Kanten $\leq k$, so ist der Satz natürlich richtig. Wir nehmen also an, daß er stets richtig ist, wenn diese Zahl $< N$ ist und beweisen ihn für den Graph G mit N Kanten.

Läßt man aus G irgend eine Kante, e weg, so entsteht also ein — natürlich ebenfalls paarer — Graph G' , dessen Kanten mit den k Indizes in einer dem Satze C) entsprechenden Weise versehen werden können. Diese Indizes denken wir an den Kanten von G' angebracht. Verbindet die weggelassene Kante e die Punkte A und B , so ist es *erstens* möglich, daß irgend ein Index weder in A (d. h. an einer Kante die nach A läuft), noch in B vorkommt. In diesem Falle kann man diesen Index der Kante e zuordnen und unser Ziel ist erreicht. Wir können uns also auf den *zweiten* Fall beschränken: ein Index, etwa „1“, der in B fehlt (einen solchen muß

*) Petersen, l. c., S. 195.

**) Nimmt man nämlich den Satz A) als richtig an, so hat der Graph k^{ten} Grades, G_k , einen Faktor ersten Grades G_1 und es ist $G_k = G_1 G_{k-1}$, ebenso ist $G_{k-1} = G_1' G_{k-2}$, $G_{k-2} = G_1'' G_{k-3}$, ... wo auch G_1', G_1'', \dots Faktoren ersten Grades sind; endlich ist also $G_k = G_1 G_1' G_1'' \dots G_1^{(k-1)}$ wirklich in Faktoren ersten Grades zerlegt. — Für eine gerade Zahl k folgt Satz B) unmittelbar aus einem Satze von Petersen (l. c., S. 200). Es wäre auch nicht schwer, den Fall einer ungeraden Gradzahl auf diesen Fall zurückzuführen. Der hier folgende Beweis, der auch zu allgemeineren Resultaten führt, ist jedoch einfacher und macht die Unterscheidung dieser zwei Fälle nicht nötig.

es geben, da in G' höchstens $k - 1$ Kanten nach B — und ebenso auch nach A — laufen), kommt in A vor. Sei weiter „2“ ein Index, der in A nicht vorkommt. — Sei nun AA_1 die Kante mit dem Index „1“. Eventuell gibt es eine Kante A_1A_2 mit dem Index „2“, dann vielleicht eine Kante A_2A_3 mit dem Index „1“, eine Kante A_3A_4 mit dem Index „2“, usw. Wir bilden diesen „alternierenden“ Weg $AA_1A_2A_3\cdots$ so weit als nur möglich. Er ist — nach der Wahl der Indizes „1“ und „2“ — eindeutig bestimmt. Auf diesem Weg kann man keinen Punkt zweimal erreichen, denn wäre A_i der erste Punkt, der schon einmal passiert wurde, so müßten in A_i drei Kanten mit den Indizes „1“ oder „2“ vorkommen. Aber auch nach A kann man nicht zurückgelangen, da dort „2“ gar nicht vorkommt und „1“ (mit der Kante AA_1) schon benutzt wurde. Endlich kann man auf diesem Weg nicht nach B gelangen, denn dies könnte nur mit einer Kante vom Index „2“ geschehen („1“ kommt in B nicht vor) und dann würde der Weg von A nach B eine gerade Anzahl von Kanten enthalten; mit der weggelassenen Kante e zusammengenommen würde dieser Weg — im Gegensatz zu unseren Voraussetzungen — einen geschlossenen Kantenzug von G mit ungerader Kantenzahl ergeben.

$AA_1A_2\cdots A_r$ ist also ein doppelpunktsloser beiderseits offener Weg, der den Punkt B nicht enthält, und dessen Kanten abwechselnd die Indizes „1“ und „2“ tragen. Wir vertauschen nun die Indizes „1“ und „2“ auf den Kanten dieses Weges, ohne die Indizes der übrigen Kanten zu ändern. Die Verteilung der Indizes genügt auch nach dieser Vertauschung den Forderungen. Man sieht das unmittelbar sowohl für den ersten Punkt A , von wo aus ursprünglich keine Kante mit dem Index „2“ auslief, wie für die inneren Punkte A_i und auch für den Endpunkt A_r , von wo keine zweite Kante mit dem Index „1“ oder „2“ auslaufen kann, da sonst unser Weg nicht in A_r enden könnte. Nun haben wir aber erreicht, daß der Index „1“ auch in A nicht mehr vorkommt, so daß er der weggelassenen Kante e zugeordnet werden kann.

Damit sind der Satz C) und also auch die Sätze A) und B) bewiesen.

Bevor wir nun zu den Anwendungen dieser Untersuchungen auf die Determinantentheorie und Mengenlehre übergehen, wollen wir noch erwähnen, daß unser Satz B) in engem Zusammenhang mit einem bekannten Problem der *Analysis situs* selbst steht; dies ist das Problem des *Kartenfärbens*. Der bis heutzutage unbewiesene *Vierfarbensatz* besagt folgendes: „Man kann den Ländern einer ebenen Karte je eine von vier Farben stets auf solche Weise zuordnen, daß zwei Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie haben, immer verschiedene Farben erhalten.“ Man kann leicht sehen, daß man sich auf den Fall beschränken kann, wo die Grenzen der Karte

einen regulären Graph dritten Grades bilden und dann ist der Vierfarbensatz dem Tait'schen Satze äquivalent,^{*)} der besagt, daß ein solcher Graph stets in Faktoren ersten Grades zerfällt. Natürlich braucht darum noch nicht jeder Graph dritten Grades in drei Faktoren zu zerfallen, denn ein Graph kann nur dann als das Grenzsyste'm einer ebenen Karte angesehen werden, wenn er folgende zwei Eigenschaften besitzt: 1) er läßt sich auf der Ebene (Kugel) so zeichnen, daß dabei keine (neuen) Schnittpunkte auftreten und 2) jede seiner Kanten gehört einem doppelpunktlosen geschlossenen Kantenzuge an. Ohne diese zwei Einschränkungen ist der Tait'sche Satz (Tait hat ihn ohne diese Einschränkungen ausgesprochen und als evident erklärt^{**)}) gar nicht richtig, wie man durch zwei Beispiele zeigen kann.^{***)} — Ist aber dieser Graph ein paarer Graph, so ist nach dem bewiesenen Satze B) der Satz auch ohne diese zwei Einschränkungen richtig. Allerdings ergibt dies nichts Neues für das Problem des Kartenfärbens, da in diesem Falle — wie Kempe^{†)} bewiesen hat — nicht nur vier sondern schon drei Farben ausreichen. Für das allgemeine Problem wäre sicherlich ein wichtiger Schritt getan, wenn es — und zwar in einfacher Weise — gelingen würde, die Graphen von der Eigenschaft 1) durch innere (kombinatorische) Eigenschaften der Graphen zu charakterisieren. Dabei würde jedenfalls der Eulersche Polyedersatz eine wichtige Rolle spielen.^{††)}

§ 2.

Anwendung auf Determinanten.

Die paaren Graphen können mit den Determinanten aus ganzen oder reellen Elementen in engen Zusammenhang gebracht werden und zwar mit jenen Eigenschaften dieser Determinanten, die nur vom absoluten Betrage ihrer Glieder abhängen und unabhängig sind von den Vorzeichen, die den Gliedern zugeordnet werden.

Wir wollen uns zunächst mit solchen Determinanten

$$D = |a_{ik}|_{i,k=1,2,\dots,n}$$

beschäftigen, wo die Elemente a_{ik} nicht negative ganze Zahlen sind. Der

^{*)} Diese Untersuchungen sind zusammengestellt z. B. bei Wernicke (Math. Ann. 58, S. 413).

^{**) Philosophical Magazine (5), Bd. 17, S. 30.}

^{***)} Das eine ist ein merkwürdiger Graph von Petersen (Intermédiaire des Mathématiciens Bd. 5, S. 225), das andere z. B. ein Graph (ebenfalls dritten Grades) von Sylvester (abgedruckt als Figur 11 in der öfters erwähnten Arbeit von Petersen).

^{†)} Am. Journ. of Math. Bd. II, S. 193.

^{††)} Dies habe ich in zwei in ungarischer Sprache erschienenen Arbeiten versucht (Mathematikai és természettudományi Értesítő Bd. 29).

quadratischen Matrix D kann man einen paaren Graphen G folgendermaßen zuordnen. Wir lassen den Reihen von D gewisse Punkte

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

und den Spalten ebenfalls n Punkte,

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

als Punkte von G entsprechen und verbinden jeden Punkt A_i mit jedem Punkt B_k durch a_{ik} verschiedene Kanten. (Es kann a_{ik} auch Null sein.) Zwei A -Punkte und zwei B -Punkte werden untereinander niemals verbunden. Der durch D vollkommen bestimmte Graph G ist in der Tat ein paarer Graph, da auf jedem geschlossenen Kantenzug die Punkte A und B abwechselnd aufeinander folgen. Die Zahl der Kanten, die in A_i oder B_k zusammenlaufen ist gleich der Summe der i^{ten} Zeile, bzw. k^{ten} Spalte von D ; G ist also dann und nur dann regulär, wenn jede Reihe und jede Spalte von D dieselbe Summe ergibt. — Da weder zwei A -, noch zwei B -Punkte untereinander unmittelbar verbunden sind, so können die Kanten eines jeden Faktors ersten Grades von G folgendermaßen bezeichnet werden:

$$A_1 B_{i_1}, A_2 B_{i_2}, \dots, A_n B_{i_n}, \quad (K_i)$$

wo

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ bedeutet. Dieses (K_i) ist dann und nur dann wirklich ein Faktor ersten Grades von G , wenn jede der Zahlen

$$a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ni_n}$$

d. h. das Produkt

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

von Null verschieden ist. Dieses Produkt ist aber nichts anderes, als — vom Vorzeichen abgesehen — ein allgemeines Glied von D . Da nun nach Satz A) jeder reguläre paare Graph einen Faktor ersten Grades besitzt, sind wir zu folgendem Determinantensatze geführt worden.

D) Wenn in einer Determinante aus nicht negativen [ganzen] Zahlen jede Reihe und jede Spalte dieselbe positive Summe ergibt, so ist wenigstens ein Glied der Determinante von Null verschieden.

Nur für den Fall, daß die Elemente ganze Zahlen sind, wurde dieser Satz bewiesen, man kann aber unschwer zeigen, daß er auch für rationale, sogar für reelle Elemente überhaupt richtig bleibt. Negative Elemente dürfen jedoch nicht zugelassen werden, wie es z. B. die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

zeigt; jede Reihensumme und Spaltensumme ist hier 1 und doch verschwinden alle sechs Glieder.

Wir wollen uns noch mit dem speziellen Fall beschäftigen, wo die nichtverschwindenden Elemente gleich 1 sind. Dann läßt sich das Übereinstimmen sämtlicher Reihen- und Spaltensummen auch so ausdrücken, daß jede Reihe und Spalte dieselbe Anzahl von Nullen enthält. In diesem Falle entsprechen verschiedenen Faktoren ersten Grades von G verschiedene Glieder von D . Da weiter das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinantenglieder nicht vom Werte der nichtverschwindenden Elemente abhängt, ergibt Satz B) den folgenden Satz:

E) *Ist die Anzahl der nichtverschwindenden Elemente in jeder Reihe und Spalte einer Determinante genau gleich k , so gibt es wenigstens k nichtverschwindende Determinantenglieder.*

(Diese k Glieder können stets so gewählt werden, daß jedes nichtverschwindende Determinantenelement in einem und nur einem dieser Glieder enthalten sei.)

Die Frage, wann es genau k und wann es mehr als k nichtverschwindende Glieder gibt, ist für $k=1$ trivial, und kann für $k=2$ mit Hilfe des entsprechenden Graphes sofort entschieden werden. Schon für $k=3$ führt aber diese Frage (d. h. die Frage, wie viel Faktoren ersten Grades ein paarer Graph dritten Grades besitzt) auf viel schwierigere Untersuchungen, die auch mit dem Vierfarbensatz in enger Beziehung zu sein scheinen.

Man kann die hier gefundenen Determinantensätze (bzw. den Satz B)) auch so interpretieren:

F) *Sind auf einer quadratischen Tafel mit n^2 Feldern kn Figuren so aufgestellt, daß jede Reihe und jede Spalte genau k Figuren enthält (dabei dürfen mehrere Figuren auf demselben Felde stehn), so entsteht diese Konfiguration stets durch Überlagerung von k solchen Konfigurationen, in denen jede Zeile und jede Spalte genau eine Figur enthält.*

Eine analoge Interpretation kann auch dem Satze C) gegeben werden.

§ 3.

Unendliche Graphen und Anwendung auf die Mengenlehre.

Die hier gegebenen Untersuchungen und Anwendungen der Theorie der Graphen setzen eigentlich gar keine geometrische Anschauung voraus. Anstatt eines Graphes hätten wir immer von einer Menge von Paaren

(G) $AB, CD, AE, \dots,$

die Kanten genannt werden, sprechen können. Diese Paare werden aus

gewissen Elementen A, B, C, \dots , die Punkte genannt werden, gebildet. Nur muß man hier für die Elemente der Menge G verschiedene *Multiplizitäten* zulassen, dem Umstande entsprechend, daß dieselben zwei Punkte durch mehrere Kanten verbunden sein können. Alle unsere geometrischen Begriffe (zusammenhängender Graph, regulärer Graph, Grad und geschlossener Linienzug eines Graphes usw.) können rein abstrakt mit Hilfe der Menge G definiert werden, ohne daß wir uns auf geometrische Anschauung stützen müssen. Diese Bemerkung ist wichtig, da, wenn man sie einmal angenommen hat, nichts im Wege steht, die „Sprache der Graphen“ auch dann zu benutzen, wenn die Mengen (A, B, C, \dots) und (AB, CD, AE, \dots) nicht endlich, ja sogar von beliebig großer Mächtigkeit sind. Es wäre überflüssig für diese „unendlichen“ Graphen die Regularität, die Gradzahl, die Faktoren, (geschlossene) Kantenzüge, usw. besonders zu definieren. Wir wiederholen nur, daß ein Graph dann zusammenhängend genannt wird, falls man von irgend einem seiner Punkte zu jedem anderen durch eine endliche Anzahl seiner Kanten gelangen kann*). Die Tatsache, daß auch ein unendlicher Graph auf eindeutige Weise in zusammenhängende Teile zerfällt, kann ohne jede geometrische Anschauung leicht bewiesen werden.

Indem man die Mächtigkeit der Menge der Punkte und der Menge der Kanten keiner Einschränkung unterwirft, verallgemeinert man natürlich in hohem Maße den Begriff des Graphes. Nur eine Einschränkung wollen wir auch weiterhin beibehalten: wir werden uns auch im Folgenden nur mit solchen Graphen beschäftigen, wo die Anzahl der Kanten, die im selben Punkte zusammenlaufen, unter einer endlichen Schranke bleibt. Dann werden wir außer den schon behandelten „endlichen“ Graphen nur noch mit „abzählbaren“ Graphen (so wollen wir die Graphen mit einer abzählbaren Menge von Kanten kurz bezeichnen) zu tun haben. Es gilt nämlich der Satz:

G) *Bleibt die Anzahl der Kanten die im selben Punkt zusammenlaufen für einen Graph G unter einer endlichen Schranke h , so zerfällt G in endliche und abzählbare Teile.**)*

Es genügt zu zeigen, daß wenn G auch zusammenhängend ist, er endlich oder abzählbar sein muß. Dies ist aber klar. Durch eine Kante

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erwähnen, daß die Aussage „ein Punkt läßt sich aus einem anderen durch einen Weg aus unendlich vielen Kanten erreichen“ keinen Sinn haben kann. Die Worte „durch eine endliche Anzahl seiner Kanten“ können hier also durch die Werte „auf seinen Kanten“ ersetzt werden. — Auch jeder geschlossene Kantenzug eines Graphes besteht *eo ipso* aus einer endlichen Anzahl von Kanten.

**) Es genügt schon, wenn man nur voraussetzt, daß in jedem Punkt eine endliche Anzahl von Kanten zusammenlaufen.

kann man aus irgend einem seiner Punkte P höchstens h Punkte erreichen, durch zwei höchstens h^2 , ... durch ν Kanten höchstens h^ν . Die Menge der Punkte, die man aus P durch eine endliche Zahl von Kanten erreichen kann, d. h. die Menge sämtlicher Punkte von G , ist also endlich oder abzählbar. Dann muß natürlich auch die Menge der Kanten endlich oder abzählbar sein.

Unter den unendlichen Graphen sind nach denjenigen ersten Grades (die aus Kanten ohne Zusammenhang bestehen) natürlich die Graphen zweiten Grades die einfachsten. Diese zerfallen in geschlossene Linien mit einer endlichen Kantenzahl und in beiderseits „ins Unendliche laufende“ einfache Linien mit abzählbar unendlich vielen Kanten. Ist der Graph zweiten Grades ein paarer Graph, so ist offenbar jeder dieser Teile das Produkt zweier Faktoren ersten Grades, also*) auch der ganze Graph. Für den Grad 2 sind also die Sätze A) und B) auch für unendliche Graphen richtig.

Um auch Beispiele unendlicher Graphen höheren Grades zu geben, soll noch erwähnt sein, daß das ebene quadratische Gitter einen unendlichen regulären Graph vierten Grades repräsentiert. Das analoge räumliche Gebilde ist ein unendlicher Graph sechsten Grades.

Unser Satz G) ist von Bedeutung, wenn man die Graphen in der Mengenlehre anwendet. Er läßt in manchen Fällen das Problem auf endliche und abzählbare Mengen reduzieren, wie sich das in dem Folgenden zeigen wird.

Wir wollen nämlich jetzt die Methode der Graphen auf den Beweis und auf eine Verallgemeinerung des folgenden Bernsteinschen Satzes**) anwenden***):

*) Dieser Schluß ist unberechtigt für den, der das Zermelosche Auswahlprinzip nicht anerkennt.

**) Diss. Göttingen 1901, abgedruckt in Math. Ann. 61, S. 117. Der Bernsteinsche Beweis ist auch schon für den Fall $\nu = 2$ (eigentlich wird von Bernstein nur dieser Fall ausführlich dargestellt) recht kompliziert. (Die folgende Überlegung erledigt diesen Fall durch unmittelbare Anschauung.) Natürlich ist dieser Bernsteinsche Satz eine unmittelbare Folge des Zermeloschen Wohlordnungssatzes. Unser Beweis mag vielleicht doch auch für denjenigen Interesse besitzen, der die Zermeloschen Beweise annimmt, trotzdem wir das Zermelosche Auswahlprinzip keineswegs zu vermeiden versuchen. Wir benutzen aber nur die einfachsten Begriffe der Mengenlehre (Menge, Element, Abbildung) und der Ordnungsbegriff spielt in unserem Beweise keine Rolle.

***) Der Äquivalenzsatz der Mengenlehre, der ebenfalls von Bernstein zuerst bewiesen wurde, läßt sich mit Hilfe des Graphenbegriffes ebenfalls in recht anschaulicher Weise beweisen. In der Tat benutzt der einfachste Beweis dieses Satzes, den J. König gegeben hat (Comptes Rendus, Bd. 143, S. 110), im Grunde genommen, diesen Begriff. Da liegen jedoch die Verhältnisse so einfach (es würde nur von Graphen

Sind m und n beliebige Mächtigkeiten und ν eine endliche Zahl, so folgt aus

$$\nu m = \nu n$$

stets

$$m = n.$$

Haben die Mengen M und N die Mächtigkeiten m und n , so besagt die Gleichung $\nu m = \nu n$, daß diejenigen zwei Mengen, die aus M und N entstehen, wenn man alle Elemente durch ν verschiedene Elemente ersetzt, einander äquivalent sind. Ohne den Begriff der Mächtigkeit zu benutzen, kann also dieser Satz folgendermaßen formuliert werden:

H) *Stehen zwei Mengen in umkehrbarer $(1, \nu)$ -Relation zueinander, so sind sie äquivalent.*

Wir wollen zunächst den Begriff der „umkehrbaren $(1, \nu)$ -Relation“ genau definieren. Wir sagen, daß M zu N in einer $(1, \nu)$ -Relation steht, wenn jedem Elemente von M , ν Elemente von N entsprechen; diese brauchen jedoch nicht ν verschiedene Elemente von N zu sein, indem wir der Zuordnung eines M -Elementes zu einem N -Elemente eine *Multiplizität* zuordnen. Daß dem Elemente a von M aus N ν Elemente entsprechen, soll also stets so verstanden werden, daß, wenn dem M -Elemente a aus N die Elemente

$$b_1, b_2, \dots, b_\mu \quad (\mu \leq \nu)$$

entsprechen und diese Zuordnungen der Reihe nach die Multiplizitäten

$$s_1, s_2, \dots, s_\mu$$

besitzen, dann für jedes Element a von M

$$s_1 + s_2 + \dots + s_\mu = \nu$$

ist. Eine solche Beziehung von M auf N wird nun *umkehrbar* genannt, wenn die Umkehrung dieser Relation, die die Elemente von N den Elementen von M zuordnet, ebenfalls eine $(1, \nu)$ -Relation ist. Eine umkehrbare $(1, \nu)$ -Relation hat also die Eigenschaft, daß, wenn eines der N -Elemente die dem Elemente a von M entsprechen, b ist, so ist eines der M -Elemente, die dem Elemente b von N entsprechen, a ; und diese zwei Beziehungen haben dieselbe Multiplizität.

Dieser Umstand hat zur Folge, daß man die umkehrbare $(1, \nu)$ -Relation zweier Mengen M und N (von der Mächtigkeit m bzw. n) oder — was dasselbe ist — die Richtigkeit der Beziehung $\nu m = \nu n$, in anschaulicher Weise durch einen paaren regulären Graph repräsentieren kann.

zweiten Grades die Rede sein), daß es als überflüssig erscheint, die Terminologie der Graphentheorie zu benutzen. — Der Versuch, die dort gegebene Methode meines Vaters auf den Beweis des oben erwähnten Bernsteinschen Satzes anzuwenden, führte mich zu den Untersuchungen, die in der vorliegenden Arbeit enthalten sind.

Die Elemente von M und N werden selbst die Punkte des zu definierenden Graphes sein; ein M -Punkt wird mit einem N -Punkt durch s Kanten verbunden, wo s die Multiplizität der (gegenseitigen) Beziehung dieser zwei Elemente bedeutet. Zwei M -Punkte, sowie zwei N -Punkte werden untereinander niemals verbunden. Der so entstehende Graph ist in der Tat ein paarer Graph, da auf jedem seiner geschlossenen Kantenzüge die Punkte M und N abwechselnd aufeinander folgen und er ist auch regulär, da in jedem seiner Punkte genau ν Kanten zusammenlaufen.

Nun zerfällt (nach Satz G) der Graph G in endliche und abzählbare Teile. Sei G_1 ein beliebiger dieser Teile; seine Punkte sollen die Teilmengen M_1 und N_1 von M bzw. N bilden und es sei m_1 und n_1 die Mächtigkeit von M_1 und N_1 . Dann ist

$$\nu m_1 = \nu n_1,$$

da sowohl die linke, wie die rechte Seite die Mächtigkeit der Menge der Kanten von G_1 bedeutet. Hier sind aber m_1 und n_1 endliche Zahlen oder \aleph_0 und da für diesen Fall der Bernsteinsche Satz trivial ist, so folgt hieraus

$$m_1 = n_1.$$

Denkt man sich dies für jeden Teil von G aufgeschrieben und addiert man, so ergibt sich

$$m = n,$$

womit der Bernsteinsche Satz vollkommen bewiesen ist.

Es entstehen aber große Schwierigkeiten, wenn man zur folgenden Verschärfung des Satzes H) (des Bernsteinschen Satzes) übergeht. Es sei hier gleich erwähnt, daß es uns nicht gelungen ist diesen Satz im allgemeinen zu beweisen.

I) *Stehen zwei Mengen in einer umkehrbaren $(1, \nu)$ -Relation zueinander, so gibt es zwischen ihnen auch eine umkehrbar eindeutige Relation, die so beschaffen ist, daß sie nur solche Elemente einander zuordnet, die auch durch die gegebene $(1, \nu)$ -Relation einander zugeordnet sind.*

In dem früher definierten Graph G äußert sich der Umstand, daß zwei Elemente durch die $(1, \nu)$ -Relation einander entsprechen, dadurch, daß die entsprechenden zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind. Der Satz I) besagt also einfach, daß G einen Faktor ersten Grades besitzt; er würde also bewiesen sein, wenn man zeigen könnte, daß der Satz A) auch für unendliche Graphen richtig ist. (Nach Satz G) würde es genügen Satz A) nur noch für abzählbare Graphen zu beweisen.) — Auch umgekehrt folgt aus I) der Satz A) für unendliche Graphen. Denn jeder paarer Graph ν^{ten} Grades kann als ein solcher Graph entstanden gedacht werden, der die umkehrbare $(1, \nu)$ -Relation zweier Mengen repräsentiert. Dies folgt daraus,

daß — wie wir dies für endliche Graphen schon ausgeführt haben — auch im Falle eines unendlichen paaren Graphes seine Punkte so in zwei Gruppen geteilt werden können, daß nur Punkte verschiedener Gruppen durch eine Kante verbunden sind*).

Hierdurch hat sich Satz I) mit dem für endliche und unendliche Graphen formulierten Satz A) äquivalent erwiesen. Auch den Sätzen B) und C) sind diese Sätze äquivalent. Denn nicht nur B) ist eine Folge von C) und A) von B), was für unendliche Graphen ebenso ersichtlich ist, wie für endliche, sondern es gilt auch umgekehrt, daß B) aus A) und C) aus B) folgt. Nur letztere Behauptung bedarf eines besonderen Beweises. Wir beweisen also den Satz:

Der Satz C) ist eine Folge des Satzes B).

Es sei G ein beliebiger paarer Graph, der so beschaffen ist, daß in jedem seiner Punkte höchstens k Kanten zusammenlaufen. Wir ergänzen G folgendermaßen zu einem neuen Graph H . Wir nehmen den Punkten von G entsprechend je einen neuen Punkt an und verbinden zwei neue Punkte mit soviel Kanten untereinander, als die entsprechenden zwei Punkte in G verbunden sind. Außerdem verbinden wir jeden Punkt von G mit dem ihm entsprechenden neuen Punkt durch $k - \alpha$ Kanten, wo $\alpha (\leq k)$ die Zahl der Kanten bedeutet, die in G nach diesem G -Punkte laufen. Andere Punkte und Kanten werden nicht eingeführt. Der so entstandene Graph H ist regulär, da in jedem seiner Punkte $\alpha + (k - \alpha) = k$ Kanten zusammenlaufen. Auch ist H ein paarer Graph. Dies sieht man folgendermaßen ein. Da G ein paarer Graph ist, lassen sich seine Punkte so in zwei Gruppen I und II einteilen, daß jede Kante von G nur Punkte verschiedener Gruppen verbindet. Teilt man nun die neuen Punkte in I oder II ein, je nachdem der entsprechende G -Punkt zu II oder I gehört, so verbinden auch die Kanten von H nur Punkte verschiedener Gruppen (I und II). — Nimmt man also den Satz B) an, so zerfällt H in k Faktoren ersten Grades. Teilt man je einen von k Indizes den Kanten von G zu, je nachdem sie dem einen oder anderen dieser Faktoren angehören, so entspricht diese Verteilung der Indizes dem Satze C).

Wir wollen jetzt endlich noch zeigen, daß es genügen würde die Sätze A), B), C) und I), die sich einander als äquivalent erwiesen haben, für den Fall zu beweisen, daß die Gradzahl in A) und B) (bzw. die Zahl k in C) und die Zahl ν in I)) eine Primzahl ist. Dies folgt für den Satz A), also auch für die übrigen drei, unmittelbar aus dem Satze:

K) Wenn jeder paare Graph μ^{ten} Grades und jeder paare Graph ν^{ten}

*) Zerfällt der Graph in unendlich viele Teile, so braucht man zu diesem Schluß wieder das Zermelosche Auswahlprinzip.

Grades einen Faktor ersten Grades besitzt, so hat auch jeder paare Graph μv^{ten} Grades einen solchen Faktor.

Nehmen wir die Voraussetzungen dieses Satzes an und es sei P ein beliebiger Punkt eines beliebigen paaren Graphes G , μv^{ten} Grades. Wir ersetzen P durch μ Punkte P_1, P_2, \dots, P_μ und führen die μv Kanten, die in G nach P laufen anstatt von P nach den Punkten P_i , und zwar so (sonst in beliebiger Weise), daß in jedem P_i ($i = 1, 2, \dots, \mu$) genau v dieser μv Kanten zusammenlaufen sollen. Führt man dies für jeden Punkt von G aus, so erhält man einen Graph G_v , v^{ten} Grades; und dies ist ebenfalls ein paarer Graph, da jedem geschlossenen Kantenzuge von G_v ein geschlossener Kantenzug von G mit derselben Kantenzahl entspricht. Nach unseren Voraussetzungen hat also G_v einen Faktor ersten Grades G_1 . Vereinigt man nun wieder die Punkte P_1, P_2, \dots, P_μ zu je einem Punkte P , wodurch man aus G_v den ursprünglichen Graph G zurückerhält, so geht G_1 in einen Faktor G_μ , μ^{ten} Grades von G über. Als ein Teil von G ist auch dieser G_μ ein paarer Graph und hat also, nach unseren Voraussetzungen, einen Faktor ersten Grades. Dies ist natürlich auch ein Faktor ersten Grades von G , womit Satz K) bewiesen ist.

[Indem man den ersten Teil dieses Beweises fast wörtlich wiederholt, ergibt sich auch das folgende, teilweise allgemeinere Resultat:

Besitzt jeder paare Graph v^{ten} Grades einen Faktor k^{ten} Grades, so besitzt auch jeder paare Graph μv^{ten} Grades einen Faktor μk^{ten} Grades.]

Für die Gradzahl 2 haben wir die Sätze A) und B) auch für unendliche Graphen bewiesen. Es folgt also aus K) daß die Sätze A), B), C) und I) *sicherlich richtig sind, wenn die Gradzahl* (bzw. die Zahl k in C) und die Zahl v in I) *eine Potenz von 2 ist*. Für eine beliebige Gradzahl (ja sogar schon für die Gradzahl 3 scheinen jedoch unsere Methoden nicht auszureichen, trotzdem man, wie wir sahen, sich auf abzählbare Graphen beschränken kann. Die vollständige Induktion, durch die wir den Satz C) für endliche Graphen bewiesen haben, versagt sofort, wenn der Graph unendlich viele Kanten hat.

Die Resultate dieser Arbeit wurden am 15. November 1915 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

Budapest, Oktober 1915.

Über die Starrheit konvexer Polyeder.

Von

M. DEHN in Breslau.

Cauchy hat auf bewundernswerte Art den Satz bewiesen:

Zwei gleichzusammengesetzte konvexe) Polyeder mit entsprechend kongruenten Seitenflächen sind selbst kongruent oder symmetrisch.*

Im folgenden soll der sehr eng mit dem Cauchyschen Satz zusammenhängende Satz bewiesen werden:

Ein konvexes Polyeder mit starren Seitenflächen ist auch infinitesimal nur wie ein starrer Körper beweglich.

Der analytische Ausdruck für diese Tatsache ist: sind $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n$ die Koordinaten der Ecken des Polyeders,

$f_1(a_1, \dots, c_3; x_1, \dots, z_n) = f_2(a_1, \dots, c_3; x_1, \dots, z_n) = f_m(a_1, \dots, c_3; x_1, \dots, z_n) = 0$ Bedingungen zwischen den Koordinaten, die die Starrheit der Seitenflächen zur Folge haben (die drei ersten Ecken sollen auf einer Seitenfläche und nicht in einer Geraden liegen), dann ist in der Matrix:

$$M: \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{array}$$

mindestens eine $3n$ -reihige Determinante von Null verschieden. Anschaulicher und völlig gleichbedeutend mit dem obigen Satz ist die Aussage:

Zu jedem an den Ecken eines konvexen Polyeders angreifenden, im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystem gibt es ein an den Ecken angreifendes und in den Seitenflächen wirkendes Kräftesystem von der Art,

*) Liegen alle von den Ecken einer Seitenfläche verschiedene Ecken eines Polyeders auf einer Seite der Ebene dieser Seitenfläche, dann heißt das Polyeder konvex.

daß 1. die Kräfte des ersten Systems, die an einer Ecke angreifen mit den an derselben Ecke angreifenden Kräften des zweiten Systems äquivalent sind und 2. die in einer Seitenfläche wirkenden Kräfte des zweiten Systems für sich im Gleichgewicht sind.

Ein noch kürzerer Ausdruck hierfür ist:

Ein aus starren Seitenflächen aufgebautes konvexes Polyeder ist stabil.

Sowohl in dem Cauchyschen wie in dem von uns zu beweisenden Satz enthalten, aber viel weniger als diese aussagend ist der folgende Satz:

Die endlichen Bewegungen eines konvexen Polyeders mit starren Seitenflächen sind die eines starren Körpers.

Unser Beweisgang ist von dem entsprechenden Cauchyschen durchaus verschieden.

1. Es ist sehr leicht einzusehen, daß wir unsere Untersuchung auf Trigonalpolyeder, d. i. auf von lauter Dreiecken begrenzte Polyeder beschränken können. Denn ist ein Polyeder mit dem n -Eck F infinitesimal beweglich, so ist sicher auch das Polyeder infinitesimal beweglich, das aus dem ersten entsteht, wenn man F durch die Seitenflächen einer Pyramide mit der Grundfläche F ersetzt. Denn dadurch kann die Beweglichkeit des Polyeders nicht verringert werden. Dasselbe ist auch leicht analytisch einzusehen: Wir fügen zu der Matrix M die drei Reihen hinzu, die den drei Bedingungen entsprechen, deren Erfüllung die Starrheit der sämtlichen Seitenflächen der Pyramide zur Folge hat. Sämtliche $3n + 3$ -reihigen Determinanten der neuen Matrix werden verschwinden, wenn die sämtlichen $3n$ -reihigen Determinanten von M verschwinden. Also folgt aus der infinitesimalen Beweglichkeit des ursprünglichen Polyeders dieselbe Eigenschaft für das neue, selbst wenn wir für dieses letztere die Starrheit der Fläche F aufrecht erhalten. Ist das ursprüngliche Polyeder konvex, so ist auch das neue konvex, falls wir die Höhe der hinzugefügten Pyramide genügend klein wählen. Aus der infinitesimalen Starrheit sämtlicher konvexer Trigonalpolyeder folgt also dieselbe Eigenschaft für sämtliche konvexe Polyeder. *Wir beschränken uns deswegen von jetzt an auf Trigonalpolyeder.*

2. Wir bezeichnen eine Seitenfläche, ihre drei Kanten und ihre drei Ecken als Randelemente, alle übrigen Elemente der Polyeder als innere. Die Starrheit sämtlicher Seitenflächen folgt hier aus der Starrheit der Kanten. Halten wir also die drei Randecken fest, so werden die der Voraussetzung entsprechenden, die Beweglichkeit des Polyeders einschränkenden Bedingungen ausgedrückt durch die Starrheit sämtlicher innerer Kanten. Ist ρ die Anzahl der Kanten, so ist $\frac{2\rho}{3}$ die Anzahl der Flächen und also nach der Eulerschen Formel die Anzahl der Ecken gleich $\frac{\rho}{3} + 2$.

wir die sämtlichen möglichen Zuordnungen entsprechenden, dergestalt mit Vorzeichen versehenen Produkte, so erhalten wir $\pm D$.

Wir werden nun Folgendes nachweisen: 1) *Es existieren für jedes Eulersche Polyeder solche Anordnungen der inneren Kanten zu Tripeln, daß auf den drei Kanten jedes Tripels ein und dieselbe innere Ecke liegt.* — Damit werden wir gezeigt haben, daß für kein Eulersches Polyeder die Determinante allein wegen der Verteilung der Nullen in ihrer Matrix verschwindet, oder, was dasselbe ist, daß die Anzahl der Glieder in der D darstellenden Summe von Null verschieden ist. Liegen bei dem Polyeder keine drei von einer Ecke ausgehenden Kanten in einer Ebene, eine für konvexe Polyeder stets erfüllte Bedingung, so werden die Glieder in dieser Summe alle von Null verschieden sein. — 2) *Die Zahl v_k (d. i. die Anzahl der Kantenvertauschungen, die die erste Zuordnung in die k^{te} überführen) vermehrt um die Anzahl der Umlaufssinnänderungen, die die Tetraeder $(P, P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3})$ durch diese Kantenvertauschungen erleiden, ist bei konvexen Polyedern gerade.* — Daraus folgt, daß D durch die Summe lauter von Null verschiedener Größen mit gleichem Vorzeichen dargestellt wird und deswegen von Null verschieden ist. *Mit diesem Nachweis werden wir also unser Ziel erreicht haben.*

4. Wir führen den Beweis für die Existenz der im vorigen Abschnitt erklärten Zuordnungen (wir bezeichnen sie mit den Buchstaben Φ) rein topologisch. Wir setzen von den zu betrachtenden Polyedern nur voraus, daß sie einfachen Zusammenhang besitzen und daß zwei ihrer Ecken höchstens durch eine Kante verbunden sind, Eigenschaften, die für konvexe ebenflächige Polyeder stets erfüllt sind. —

Existiert eine Zuordnung Φ' für das Polyeder Π' , so existiert auch eine solche, Φ , für das Polyeder Π , das aus Π' entsteht durch zentrale Zerlegung eines inneren Dreiecks in drei Dreiecke. Wir erhalten Φ aus Φ' , wenn wir die drei neuen Kanten der neuen Ecke zuordnen. Wir können deswegen unsere Betrachtung beschränken auf solche Polyeder, die keine innere dreistrahligke Ecke haben.

Es möge nun Π eine vierstrahlige innere Ecke A mit den Kanten AB, AC, AD und AE haben (s. Fig. 1). Nach unseren Voraussetzungen sind B und D , sowie C und E je voneinander verschieden und es können auf Π nicht gleichzeitig eine Kante BD und eine Kante EC liegen. Es möge etwa EC nicht auf Π liegen, dann bilden wir aus Π ein neues Polyeder Π' , indem wir die vier an A liegenden Dreiecke ersetzen durch die beiden Dreiecke BEC und DEC .

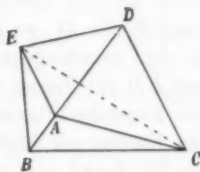


Fig. 1.

Wir bestimmen ferner das Randdreieck für Π' so, daß EC innere Kante von Π' wird. Das ist sicher möglich, da auf Π' sicher noch andere Dreiecke als BEC und DEC liegen. Gibt es nun nach dieser Bestimmung eine Zuordnung Φ' für Π' und ist durch sie EC etwa dem Punkte C zugeordnet, dann erhalten wir Φ aus Φ' , indem wir die Zuordnung für die Π und Π' gemeinsamen Kanten bestehen lassen und AB , AE und AD der Ecke A zuordnen.

Da für Π' ebenfalls unsere beiden Voraussetzungen erfüllt sind, so können wir dieselbe Reduktion auf eine etwa in Π' vorhandene vierstrahlige Ecke anwenden und erhalten Φ' aus der Zuordnung Φ'' für das reduzierte Polyeder genau so wie Φ aus Φ' . Wir erkennen so, daß wir unsere Be-

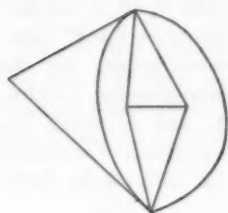


Fig. 2.

trachtungen beschränken können auf solche Polyeder, die weder dreistrahlig noch vierstrahlige innere Ecken besitzen. — Wir erkennen auch leicht, daß unsere Voraussetzungen beide notwendig sind. Denn die Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges muß schon deswegen gemacht werden, damit die Anzahl der inneren Kanten dreimal so groß ist, wie die Anzahl der inneren Ecken. Die Voraus-

setzung, daß zwei Ecken nur durch eine Kante verbunden sind, wurde bei der Reduktionskonstruktion benutzt und das nebenstehende Beispiel (Fig. 2) zeigt, daß, wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist, auch gar keine Zuordnung der gewünschten Art zu existieren braucht.

Es möge nun Π eine fünfstrahlige innere Ecke A mit den Kanten AB , AC , AD , AE und AF besitzen. Dann sind nach unseren Voraussetzungen B , C , D , E , F alle voneinander verschieden und es gibt höchstens eine Kante von Π , die Diagonale des Fünfecks $BCDEF$ ist. Wir können also annehmen, daß auf Π keine Kanten FC und FD liegen. Bilden wir dann Π' aus Π , indem wir die fünf Dreiecke mit der Spitze A ersetzen durch die drei Dreiecke mit der Spitze F , und existiert dann eine Zuordnung Φ' für Π' , so können wir aus Φ' eine Zuordnung Φ für Π ableiten auf drei verschiedene Weisen je nach der Art, wie durch Φ' die Kanten FC und FD den Ecken zugeordnet sind. Die drei verschiedenen Fälle sind in den folgenden Figuren 3, 4, 5 dargestellt, wobei die in Betracht kommenden Kanten mit Pfeilen versehen sind, die von derjenigen Ecke ausgehen, der die Kante zugeordnet ist.

Zur Erläuterung des letzten Falles sei noch bemerkt, daß durch Φ' nicht gleichzeitig die Kanten FC und FD , sowie FB und FE der Ecke F zugeordnet sein können. In Fig. 5 ist deswegen angenommen, daß durch Φ' die Kante FE der Ecke E zugeordnet ist. — Da für Π' ebenfalls unsere beiden Voraussetzungen erfüllt sind, so können wir dieselbe Re-

duktion auf eine etwa in Π' vorhandene fünfstrahlige Ecke anwenden und erhalten Φ' aus der Zuordnung Φ'' für das reduzierte Polyeder genau nach demselben Verfahren, wie Φ aus Φ' .

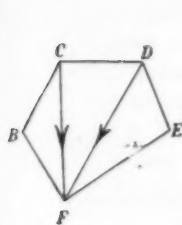


Fig. 3.

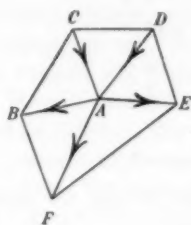


Fig. 4.

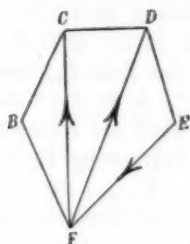
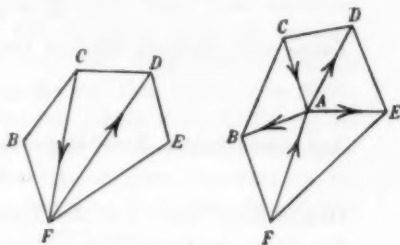
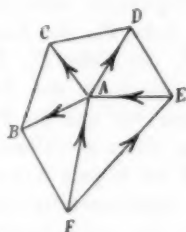


Fig. 5.



Bei keinem Polyeder können die inneren Ecken alle sechs- und mehrstrahlig sein. Denn dann würden von den inneren $\frac{\rho}{3} - 1$ Ecken mehr als $\frac{6}{2} \left(\frac{\rho}{3} - 1 \right) = \rho - 3$ Kanten ausgehen (man beachte, daß bei der sechsfachen Zählung der inneren Ecken die nach den Randecken gehenden Kanten nicht doppelt gezählt werden). Es gibt aber nur $\rho - 3$ innere Kanten. — Durch die oben dargestellten Reduktionen für drei-, vier- und fünfstrahlige Ecken können wir also für jedes Polyeder sämtliche innere Ecken wegschaffen bis ein Polyeder Π^0 übrig bleibt, das aus zwei von den Randkanten begrenzten Dreiecken besteht. Da Π^0 aber keine innere Ecke und Kante besitzt, ist für Π^0 die Zuordnung Φ^0 trivial.

Hiermit haben wir die Existenz der Zuordnung Φ für jedes Trigonalpolyeder Π bewiesen, das die beiden Voraussetzungen erfüllt. Wie bemerkt, treffen diese Voraussetzungen sicher ein, wenn das Polyeder konvex und ebenflächig ist.

5. Wir betrachten einen geschlossenen Polygonzug Z mit n Ecken auf dem Trigonalpolyeder Π . Nach Ausscheidung der Ecken und Kanten

von Z zerfällt Π in zwei Teile, von denen der eine, Π^i , nur *innere* Ecken, Kanten und Flächen enthält. Ihre Anzahlen seien E^i , K^i , F^i . Nach der Eulerschen Formel ist:

$$K^i + 1 = E^i + F^i,$$

ferner weil sämtliche Flächen Dreiecke sind:

$$K^i = \frac{3}{2} E^i - \frac{n}{2}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt:

$$K^i = 3E^i + n - 3.$$

Daraus folgt aber: *Von den Kanten von Π^i sind bei jeder Zuordnung Φ den Ecken des Zuges Z $n-3$ zugeordnet.*

Wir betrachten nun einen Prozeß, durch den man von einer Zuordnung zu jeder beliebigen anderen kommen kann. Sei etwa bei Φ_1 die Kante P_0P_1 der Ecke P_0 , die Kante P_1P_2 der Ecke P_1 zugeordnet, bei Φ_2 dagegen P_0P_1 der Ecke P_1 , P_1P_2 der Ecke P_2 , dann gibt es sicher eine Kante P_2P_3 , die in Φ_1 der Ecke P_2 , in Φ_2 der Ecke P_3 zugeordnet ist. Berücksichtigen wir nun die Endlichkeit der Kantenzahl, so ergibt diese Betrachtung einen geschlossenen Polygonzug $P_m P_{m+1} \dots P_{m+n} P_m$ von der Art, daß bei Φ jede Kante $P_{m+i} P_{m+i+1}$ der Ecke P_{m+i} , bei Φ_2 dagegen P_{m+i+1} zugeordnet ist. Einen geschlossenen Polygonzug, dessen Kanten und Ecken bei einer Zuordnung Φ einander paarweise zugeordnet sind, wollen wir einen *Ring* von Φ nennen. Wir erkennen aus dem Vorhergehenden: *von einer Zuordnung Φ_1 kommt man zu einer beliebigen anderen Zuordnung Φ_2 , indem man die Zuordnung Φ_1 durch Umkehrung der Zuordnung in einem oder mehreren Ringen transformiert.*

Wir wollen sagen, an einer Ringecke besteht eine *Kreuzung*, wenn die beiden in der Ecke zusammenstoßenden Ringkanten getrennt werden von den anderen beiden der Ecke zugeordneten Kanten.

Es mögen nun zu ν Ringecken je zwei zum Π^i des Ringes gehörende Kanten zugeordnet sein, dann enthält der Ring nach dem oben Bewiesenen $n - 3 - 2\nu$ Kreuzungen.

Bei der Ringtransformation werden die n Kanten im Hinblick auf ihre Zuordnung zu den Ringecken zyklisch vertauscht. Diese zyklische Vertauschung der n Kanten wird aber erzeugt durch $n - 1 + 2\mu$ (μ ganze Zahl ≥ 0) Vertauschungen von Kanten zu je zweien. Daraus ergibt sich: *Die Anzahl der Kreuzungen eines Ringes vermehrt um die Anzahl der Kantenvertauschungen, die der Ringtransformation entsprechen, ist stets gerade (nämlich gleich $2n - 4 + 2\mu - 2\mu$).*

Werden die von einer Ecke ausgehenden Kanten s_1 und s_1' durch die von derselben Ecke ausgehenden Kanten s_2 und s_2' getrennt, so hat

bei einer konvexen Ecke das Tetraeder $(s_1 s_2 s_3)$ den umgekehrten Umlaufssinn wie $(s_1' s_2' s_3')$, denn bei einer konvexen Ecke liegen s_1 und s_1' auf verschiedenen Seiten der Ebene durch s_2 und s_3 . (Bei einer nicht konvexen Ecke braucht das natürlich nicht der Fall zu sein.) *Liegt also an einer Ringecke eine Kreuzung vor, so wird durch die Ringtransformation bei einem konvexen Polyeder der Umlaufssinn des der Ecke zugeordneten Tetraeders verkehrt.* Hiermit ist nach dem eben Bewiesenen auch der Beweis des zweiten Hilfssatzes erledigt, der aussagt, daß die Anzahl der von einer Zuordnung zur anderen führenden Kantenvertauschungen vermehrt um die Anzahl der bei dieser Transformation auftretenden Umlaufssinnänderungen der den Ecken zugeordneten Tetraeder eine gerade ist.

Zum Schluß sei bemerkt, daß die von uns angewandte Entwicklung auch für allgemeinere Stabverbände, sowohl ebene als räumliche, mit Vorteil angewandt werden kann.

Genval, 25. September 1915.

Funktionen von beschränkter Schwankung in zwei reellen Veränderlichen.

Von

WALTER KÜSTERMANN in Ann Arbor, Mich. U. S. A.

Im Jahre 1905 haben Arzelà*) und Hardy**) unabhängig voneinander den von Jordan herrührenden Begriff einer Funktion von beschränkter Schwankung auf Funktionen von zwei Veränderlichen übertragen. Die von den beiden Autoren aufgestellten Definitionen sind nicht gleichlautend, aber die Funktionenklasse A , deren Elemente nach der Definition Arzelàs von beschränkter Schwankung sind, hat eine Anzahl wichtiger Eigenschaften gemein mit der Klasse H der Funktionen von beschränkter Schwankung im Hardyschen Sinne. Somit drängt sich die Frage auf: Sind die beiden Funktionenklassen wirklich voneinander verschieden, oder stimmen sie schließlich grundsätzlich überein?

Bekanntlich ist jede beschränkt veränderliche Funktion von einer Variablen auch *monotonoid*, d. h. darstellbar als Differenz zweier positiver, monoton steigender, endlich bleibender Komponenten, und umgekehrt. Nun zeigt Arzelà, daß jede Funktion der Klasse A *isomonotoïd* ist, d. h. in die Differenz zweier *isomonoton****) steigender und endlich bleibender Komponenten zerlegt werden kann, und daß umgekehrt jede isomonotonoide Funktion zur Klasse A gehört. Hardy beweist für Funktionen der Klasse H zwar den ersten Teil dieses Satzes. Ein Analogon der Umkehrung folgert er jedoch nur nach Auferlegung einer weiteren Bedingung auf die isomonotonen Komponenten (s. u. § 2). Daraus folgt, daß die Klasse H in A enthalten ist, und wenn sich eine Funktion der Klasse A finden läßt, welche nicht zur Klasse H gehört, so ist A umfassender als H .

*) Arzelà, Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata, Bologna Rend. 9 (1904/5), S. 100.

**) Hardy, On double Fourier Series, Quart. Journ. of Math. 37 (1905/6), S. 53.

***) Wir nennen eine Funktion zweier reellen Variablen *isomonoton*, wenn sie nach beiden positiven Achsenrichtungen in gleichem Sinne monoton ist.

Dies trifft nun in der Tat zu, wie wir zeigen werden durch die Konstruktion einer Funktion, welche isomonoton steigend und dennoch nicht von beschränkter Schwankung im Sinne Hardys, übrigens sogar stetig ist (§ 3).

Die Funktionen beider Klassen sind integrierbar, für ihre Integrale existiert ein Analogon zum zweiten Mittelwertsatz*), und sie selbst lassen eine Entwicklung in konvergente Fouriersche Doppelreihen**) zu. Da jedoch nach der Hardyschen Definition die Identität zwischen Funktion von beschränkter Schwankung und isomonotonoider Funktion nicht erhalten bleibt, wohl aber nach der von Arzelà, so möchten wir die letztere nicht nur als die *umfassendere* sondern auch *natürlichere* Verallgemeinerung der Jordanschen Idee bezeichnen. Wenn trotzdem in neueren Veröffentlichungen Lebesgue***) und W. H. Young†) die Hardysche Definition benutzen, ohne der Arbeiten Arzelàs Erwähnung zu tun, so beruht das vermutlich auf Unkenntnis dieser Arbeiten, welche in einer wenig verbreiteten Zeitschrift erschienen sind. Wie dem auch sei, die Bezeichnung „Funktion von beschränkter Schwankung in zwei Variablen“ erweist sich auf Grund der hier vorzunehmenden Feststellung, als *nicht eindeutig*, sondern auf zwei tatsächlich verschiedene Funktionenklassen anwendbar.

Wir rekapitulieren kurz die Definitionen von Arzelà und Hardy und verweisen den Leser für ausführlichere Belehrung auf die Originalarbeiten.

§ 1.

Beschränkte Schwankung im Sinne Arzelàs.

Im Rechteck $ABCD$, parallel den Koordinatenachsen, sei die beschränkte Funktion $z(x, y)$ definiert. Wir nennen eine steigende Linie (linea saliente) jede stetige Kurve, welche von einem bewegten Punkte so durchlaufen werden kann, daß entweder beide Koordinaten des Punktes stetig wachsen oder auch nur die eine wächst, während die andere konstant bleibt.

Sei m ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung des Rechtecks und l eine steigende Linie von der linken unteren Ecke A bis m . Man fixiere auf l die Teilpunkte m_1, m_2, \dots, m_p in endlicher Anzahl und

*) Siehe Arzelà, Sul secondo teorema della media per gli integrali doppi, Bologna Mem. 10, S. 99–189.

**) Siehe meine Inauguraldissertation: Über Fouriersche Doppelreihen und das Poissonsche Doppelintegral, München, 1913.

***) Lebesgue, Sur l'intégration des Fonctions discontinues, Ann. de l'École Normale (3), 27 (1910), S. 361.

†) W. H. Young, On multiple Fourier Series, Lond. Math. Soc. Proc. (2), 11 (1912), S. 133.

ganz willkürlich, jedoch so, daß sie in der gegebenen Ordnung von dem bewegten Punkte angetroffen werden. $z(m_i)$ bedeute den Funktionswert im Punkte m_i . Offenbar ist

$$z(m_1) - z(A) + z(m_2) - z(m_1) + \dots + z(m) - z(m_p) = z(m) - z(A).$$

Die Differenzen $z(m_i) - z(m_{i-1})$ sind teils positiv, teils negativ; sei p_i die Summe der positiven, $-n_i$ die der negativen, so gilt:

$$z(m) - z(A) = p_i - n_i,$$

und diese Beziehung besteht unabhängig von der Wahl der Teilpunkte. Die Menge der p_i (resp. n_i) für alle möglichen Einteilungen der Linie l_i hat eine obere Schranke P_i (resp. N_i). Wir setzen sie als endlich voraus, dann folgt:

$$z(m) - z(A) = P_i - N_i.$$

Für eine beliebige andere steigende Linie von A bis m , sagen wir l_i , besteht ähnlich:

$$z(m) - z(A) = P_{i_1} - N_{i_1}.$$

Zu der Gesamtheit aller steigenden Linien von A bis m gehört eine Zahlenmenge P_{i_1}, P_{i_2}, \dots (resp. N_{i_1}, N_{i_2}, \dots), welche eine obere Schranke $P(m)$ (resp. $N(m)$) besitzt. Setzen wir wieder $P(m)$ und $N(m)$ endlich voraus, dann ist:

$$z(m) - z(A) = P(m) - N(m).$$

Hat schließlich eine der Funktionen $P(m)$, $N(m)$ im abgeschlossenen Rechteck $ABCD$ eine endliche obere Schranke, so gilt das Gleiche von der anderen und Arzelà bezeichnet $z(x, y)$ als Funktion von beschränkter Schwankung im Rechteck.

Er beweist den Satz: *Jede Funktion von beschränkter Schwankung (der Klasse A) ist isomonotonoid und umgekehrt.*

§ 2.

Beschränkte Schwankung im Sinne Hardys.

Im Rechteck $(a, b; A, B)$, definiert durch die Ungleichungen

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B,$$

sei eine beschränkte Funktion $f(x, y)$ gegeben. Als Zuwachs von $f(x, y)$ in diesem Rechteck bezeichnet man:

$$\Delta f(a, b; A, B) \equiv f(A, B) - f(a, B) - f(A, b) + f(a, b).$$

Nehmen wir ein endliches Wertsystem für x :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_m = A,$$

und ein endliches Wertsystem für y :

$$b = b_0 < b_1 < \dots < b_j < \dots < b_n = B,$$

dann ist

$$(1) \quad \Delta f(a, b; A, B) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta f(a_i, b_j; a_{i+1}, b_{j+1}) \\ = P(a, b) - N(a, b),$$

falls $P(a, b)$ (resp. $-N(a, b)$) die Summe der positiven (resp. negativen) Zuwächse Δf in der Doppelsumme von (1) bedeutet. Die Summe der Absolutzuwächse von $f(x, y)$ in dem System von Rechtecken

$$(a_i, b_j; a_{i+1}, b_{j+1})$$

ist

$$(2) \quad T(a, b) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta f(a_i, b_j; a_{i+1}, b_{j+1})| \\ = P(a, b) + N(a, b).$$

Hardy nennt $f(x, y)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, wenn erstens für jedes ξ, η des Rechtecks $(a, b; A, B)$ die Funktionen $f(x, \eta)$ und $f(\xi, y)$ von beschränkter Schwankung in x resp. y sind, und zweitens $T(a, b)$ eine endliche obere Schranke $T(a, b; A, B)$ besitzt für alle möglichen Wertsysteme a, b . Es folgt dann aus (1) und (2), daß auch $P(a, b)$, $N(a, b)$ endliche obere Schranken haben. Hardy beweist nun folgenden Satz nebst seiner Umkehrung:

Jede Funktion von beschränkter Schwankung (der Klasse H) im Rechteck $(a, b; A, B)$ kann dort dargestellt werden in der Form

$$\theta_1(x, y) - \theta_2(x, y),$$

wo θ , d. h. jede der beiden Funktionen θ_1 und θ_2 , die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(3) \quad \begin{cases} \theta(x, y) \geq 0, \\ \theta(x, y) - \theta(x, \eta) \geq 0 \quad \text{für } y > \eta, \\ \theta(x, y) - \theta(\xi, y) \geq 0 \quad \text{„ } x > \xi, \\ \Delta \theta(\xi, \eta; x, y) = \theta(x, y) - \theta(\xi, y) - \theta(x, \eta) + \theta(\xi, \eta) \\ \geq 0 \quad \text{für } x > \xi, y > \eta. \end{cases}$$

Die ersten drei Bedingungen in (3) genügen, um θ positiv und steigend isomonoton zu machen. Die vierte ist der Hardyschen Methode eigentümlich und erscheint nicht bei Arzelà. Es bietet meist Schwierigkeiten eine gegebene equimonotone Funktion auf diese Bedingung zu untersuchen.

§ 3.

Beispiel einer isomonotonen Funktion welche nicht von beschränkter Schwankung im Sinne Hardys ist.

Im Rechteck $(a, b; c, d)$, definiert durch die Bedingungen:

$$a \leq x \leq c, \quad b \leq y \leq d,$$

sei die folgende Funktion vorgelegt:

$$(I) \quad \psi(x, y) = A + x \frac{x-a}{c-a} + x \left(1 - \frac{x-a}{c-a}\right) \frac{y-b}{d-b}.$$

Sie ist stetig und steigend isomonoton, da $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ beide nie negative Werte annehmen. Bei konstantem x wird ψ eine lineare Funktion von y , bei konstantem y eine lineare Funktion von x . Im besonderen hat man:

$$\psi(c, y) = \psi(x, d) = A + x,$$

d. h. die Funktion ist konstant längs der rechten und oberen Berandung des Rechtecks. Ihr Zuwachs ist:

$$\Delta \psi(a, b; c, d) = \psi(c, d) - \psi(a, d) - \psi(c, b) + \psi(a, b) = -x.$$

Betrachten wir nun im selben Bereich die Funktion:

$$(II) \quad \varphi(x, y) = A + x \frac{x-a}{c-a} \cdot \frac{y-b}{d-b}.$$

Sie ist ebenfalls stetig, isomonoton steigend und in bezug auf jede einzelne Veränderliche vom ersten Grade. Doch diesmal gilt:

$$\varphi(a, y) = \varphi(x, b) = A,$$

d. h. die Funktion bleibt konstant längs der linken und unteren Kante des Rechtecks. Ihr Zuwachs ist:

$$\Delta \varphi(a, b; c, d) = +x.$$

Wir wollen nun im Quadrate $(0, 0; 1, 1)$ eine Funktion $F(x, y)$ aufbauen, welche, obgleich isomonoton und sogar stetig, doch nicht von beschränkter Schwankung im Sinne Hardys ist.

Teilen wir das Quadrat durch die Geraden:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} \\ y &= y_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} \end{aligned} \right\} \mu, \nu = 1, 2, 3, \dots$$

in eine abzählbare Menge von Rechtecken $r_{\mu\nu}$ — d. h. $(x_\mu, y_\nu; x_{\mu+1}, y_{\nu+1})$ — und ordnen die $r_{\mu\nu}$ in Gruppen $g_1, g_2, \dots, g_m, \dots$ derart, daß g_m alle

Rechtecke $[r_{\mu\nu}]_m$, m an der Zahl, enthält, wofür $\mu + \nu = m + 1$ ist. In jedem $[r_{\mu\nu}]_m$ sei $F(x, y)$ definiert als Funktion vom Typus (I), wenn m ungerade, vom Typus (II), wenn m gerade ausfällt. Dabei soll $x = \frac{1}{n^2}$,

$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}$ sein, wenn m entweder gleich $2n - 2$ oder gleich $2n - 1$ ist.

Z. B. schreibt sich Gleichung (I) für das Rechteck $[r_{\mu\nu}]_m$, in welchem $m = \mu + \nu - 1 = 2n - 1$, also ungerade ist, wie folgt:

$$(4) \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{x - x_\mu}{x_{\mu+1} - x_\mu} + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{x - x_\mu}{x_{\mu+1} - x_\mu}\right) \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu};$$

während Gleichung (II) für ein $[r_{\mu\nu}]_m$ mit geradem $m = 2n - 2$ folgendermaßen lautet:

$$(5) \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{x - x_\mu}{x_{\mu+1} - x_\mu} \cdot \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu}.$$

$F(x, y)$ ist dadurch im gesamten Innern sowie auf dem linken und unteren Rande des Quadrats erklärt und zwar eindeutig, wie wir gleich sehen werden. Auf dem rechten und oberen Rande sei:

$$F(1, y) = F(x, 1) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Die Funktion ist gewiß stetig und steigend isomonoton in jedem inneren Punkte eines jeden $r_{\mu\nu}$. Wir wollen ihre Stetigkeit in y auf jeder Parallelen zur Y -Achse nachweisen. Sei etwa $x = \xi$ (konstant), dann gibt es ein x derart, daß:

$$x_x \leq \xi < x_{x+1}.$$

Wenn es einen Unstetigkeitspunkt auf dieser Geraden gibt, so kann es nur der Schnittpunkt mit einer Geraden $y = y_l$ sein. Der Punkt (ξ, y_l) liegt auf der Trennungslinie der Rechtecke $r_{x\lambda-1}$ und $r_{x\lambda}$, welche zu den aufeinanderfolgenden Gruppen y_{l-1} und y_l gehören. Ist $l = x + \lambda - 1$ eine ungerade Zahl, etwa $2p - 1$, und betrachtet man den Punkt (ξ, y_l) zunächst als auf der Berandung von $r_{x\lambda-1}$ liegend, so ergibt sich in diesem Punkte der Funktionswert:

$$\begin{aligned} F_1(\xi, y_l) &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x} \cdot \frac{y_l - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x}. \end{aligned}$$

Rechnet man andererseits (ξ, y_2) zur Berandung von $r_{x\lambda}$, so erhält man für denselben Punkt den Funktionswert:

$$\begin{aligned} F_2(\xi, y_2) &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x} + \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x} \right) \frac{y_2 - y_1}{y_{2+1} - y_2} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x}. \end{aligned}$$

Die beiden Werte sind identisch, daher muß die Funktion dort eindeutig und stetig sein. Im Falle $l=2p-2$, also gerade ist, hat man $l-1=2(p-1)-1$. Für den Punkt (ξ, y_2) , zu $r_{x\lambda-1}$ gehörig gedacht, gilt also:

$$\begin{aligned} F_1(\xi, y_2) &= \sum_{i=1}^{p-2} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(p-1)^2} \cdot \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x} + \frac{1}{(p-1)^2} \left(1 - \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x} \right) \frac{y_2 - y_{2-1}}{y_1 - y_{2-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2}, \end{aligned}$$

während er, als Randpunkt von $r_{x\lambda}$ betrachtet, den Funktionswert:

$$\begin{aligned} F_2(\xi, y_2) &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\xi - x_x}{x_{x+1} - x_x} \cdot \frac{y_2 - y_2}{y_{2+1} - y_2} \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \end{aligned}$$

liefert.

Wieder ist:

$$F_2(\xi, y_2) = F_1(\xi, y_2),$$

woraus wir auf Eindeutigkeit und Stetigkeit von $F(\xi, y)$ im Punkte (ξ, y_2) schließen. Um die Stetigkeit von $F(\xi, y)$ in y auch an der Berandung des Quadrats festzustellen, müssen wir folgende Beziehung beweisen:

$$(6) \quad \lim_{y \rightarrow 1-0} F(\xi, y) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Gleichungen (4) und (5) ergeben aber ohne weiteres für:

$$y_s \leq y \leq y_{s+1}, \quad x_x \leq x \leq x_{x+1},$$

und:

$$x + s - 1 = 2t - 2 \quad \text{oder} \quad = 2t - 1,$$

die Beziehung:

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i^2} \leq F(\xi, y) \leq \sum_{i=1}^t \frac{1}{i^2}.$$

Wenn sich nun y der Eins nähert, werden s und t unendlich und beide Summen in (7) streben demselben Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$ zu.

Somit verhält sich $F(x, y)$ stetig und gleichzeitig mit y monoton wachsend auf jeder Parallelen zur Y -Achse; aber entsprechend auch auf jeder Parallelen zur X -Achse, wie man aus der Symmetrie von $F(x, y)$ in bezug auf die Gerade $x = y$ leicht erkennt. Nach einem Satze von W. H. Young*) ist nun jede isomonotone in bezug auf jede einzelne der Veränderlichen x, y stetige Funktion auch als Funktion der beiden Veränderlichen x, y stetig.

Es bleibt noch der Nachweis zu führen, daß $F(x, y)$ nicht von beschränkter Schwankung im Sinne Hardys ist. Betrachten wir das Quadrat $(0, 0; x_{2q}, y_{2q})$, worin $2q$ eine beliebige gerade Zahl. Dies Quadrat enthält alle Rechtecke der Gruppen g_1 bis g_{2q-1} einschließlich und dazu noch andere. Daher muß T_q , die Summe der Absolutzuwächse von $F(x, y)$ in den Rechtecken dieses Quadrats, größer sein als die Summe der Absolutzuwächse in den Rechtecken der Gruppen g_1 bis g_{2q-1} , in Zeichen:

$$\begin{aligned} T_q &> \sum_{m=1}^{2q-1} m |\Delta F[r_{\mu\nu}]_m| - \sum_{n=1}^q (2n-2+2n-1) \frac{1}{n^2} \\ &> \sum_{n=1}^q (4n-3) \frac{1}{n^2} \\ &> 4 \sum_{n=1}^q \frac{1}{n} - 3 \sum_{n=1}^q \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Die erste dieser Summen läßt sich beliebig vergrößern durch passende Wahl von q , während die zweite immer unterhalb $\frac{\pi^2}{6}$ verbleibt. Es kann also die Gesamtschwankung im Quadrate $(0, 0; 1, 1)$ nicht eine endliche obere Grenze G haben. Denn wählt man q so groß, daß $T_q > G$, so entspricht ihm eine Einteilung des Einheitsquadrats in eine *endliche* Zahl von Rechtecken**) derart, daß die Summe der Absolutzuwächse von $F(x, y)$ in diesen Rechtecken G übersteigt.

*) W. H. Young, A note on monotone functions, Quart. Journ. of Math., 41 (1909/10), S. 79.

**) Den Rechtecken nämlich, in welche die endliche Zahl von Geraden:

$$\begin{cases} x = x_\mu, & \mu = 2, 3, \dots, 2q, \\ y = y_\nu, & \nu = 2, 3, \dots, 2q \end{cases}$$

das Einheitsquadrat zerlegt.

Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen.

Von

OTTO SZÁSZ in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Der folgende Satz rührt bekanntlich von Weierstraß her:

„Jede in einem abgeschlossenen endlichen Intervalle $(a, b)^*)$ stetige Funktion $f(x)$ kann in diesem Intervall durch Polynome mit beliebiger Annäherung gleichmäßig approximiert werden.“ Man drückt dies aus, indem man sagt, daß die Funktionenfolge:

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervalle (a, b) ist.

Beschränken wir uns zunächst auf das Intervall $(0, 1)$; meines Wissens hat sich zuerst Herr S. Bernstein^{**)} mit der Frage beschäftigt, wann eine Folge von *positiven* Potenzen

$$x^{p_0}, x^{p_1}, x^{p_2}, \dots, x^{p_r}, \dots$$

eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall $(0, 1)$ bildet. Er gab hierfür einerseits hinreichende, andererseits notwendige Bedingungen, die ihn zu der Frage führten, ob nicht die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{x^{p_r}}$ eine sowohl notwendige, wie auch hinreichende Bedingung darstellt.^{***)} Erst Herrn

^{*)} Das heißt: $a \leq x \leq b$.

^{**) S. Bernstein, a) Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes [Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 22–28 August 1912) Cambridge, 1913, Vol. I, S. 256–266], S. 264. — b) Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. [Mémoires publiés par la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique, 4^e, II. série, t. IV, 1912, 104 S.]}

^{***)} Die allgemeinste von Herrn Bernstein abgeleitete notwendige Bedingung lautet (a. a. O. b), S. 83–84):

Es darf keine Folge von positiven Zahlen

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, \dots$$

Müntz*) gelang es (unter der Voraussetzung: $p_v > p_{v-1}$, die sich unmittelbar auf $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v > 0$ erweitern ließ) diese Frage, und zwar in bejahendem Sinne zu beantworten.**)

Ich hatte Gelegenheit, die Arbeit des Herrn Müntz schon im Manuskript zu lesen, und daran einige Bemerkungen zu knüpfen. Aber sein Beweis entbehrt meiner Ansicht nach noch der erreichbaren Einfachheit und Übersichtlichkeit. Es läßt sich nämlich sowohl die Anwendung der

existieren, für welche die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty \delta_v \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty e^{-p_v \delta_v}$$

gleichzeitig konvergieren.

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Bedingung mit der folgenden einfacheren gleichbedeutend ist: Die Reihe $\sum_0^\infty u_v$ muß für

$$u_v = \begin{cases} 1 & \text{für } p_v \leq 1, \\ \frac{1 + \log p_v}{p_v} & \text{für } p_v > 1, \end{cases}$$

divergieren.

Die obige Bedingung läßt sich nämlich so formulieren: die Reihe

$$\sum_0^\infty (\delta_v + e^{-p_v \delta_v})$$

muß stets divergieren. Nun ist aber stets

$$\delta_v + e^{-p_v \delta_v} \geq u_v,$$

und es gibt einen Wert von δ_v , für den hier die Gleichheit gilt, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar folgt.

*) Ch. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstraß [Mathem. Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet. Berlin 1914, S. 303—312]. Dasselbst auch Literaturnachweis, zu dessen Ergänzung noch auf eine Arbeit des Herrn L. Fejér: Über die Laplacesche Reihe [Math. Ann. 67 (1909), S. 76—109], S. 97—99, und auf die daselbst angeführten Stellen verwiesen sei. Man vgl. ferner: G. Faber, Über stets konvergente Interpolationsformeln [Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX (1910), S. 142—146], S. 143—144. — S. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités [Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2^e série, XIII (1912), S. 1—2].

**) Die Herren E. Schmidt und F. Riesz haben das allgemeinere Problem behandelt: gegeben sei eine unendliche Folge im Intervall (a, b) definierter reeller stetiger Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall (a, b) definierte stetige Funktion durch lineare Aggregate der φ_v gleichmäßig approximiert werden kann? Man vgl. E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener [Math. Ann. 63 (1907), S. 433—476; Dissert. Göttingen (1905), 34 S.]. — F. Riesz, a) Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des Sciences, Paris, 144 (1907), S. 1409—1411]. b) Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3^e Série, T. 28 (1911), S. 33—62], S. 51—54.

auf unendliche lineare Gleichungssysteme bezüglichen Schmidtschen Resultate, wie auch der Fourierschen Entwicklungen vermeiden. Ferner bemerke ich, daß sich der Beweis ohne erhebliche Abänderung auch auf komplexe p , mit positiv reellem Teil erweitern läßt und auch für den Fall $\lim_{v \rightarrow \infty} \Re(p_v) = 0$ gewisse Schlüsse zuläßt. Der zu beweisende Satz lautet nun:

Satz I. *Damit die Folge*

$$(1) \quad x^0 = x^0 = 1, x^{p_1}, x^{p_2}, \dots; \Re(p_v) > 0, \quad p_v \neq p_\mu$$

eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall $(0, 1)$ sei,) ist notwendig,*

*daß $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1 + \Re(p_v)}{1 + |p_v|^2}$ divergiert, und hinreichend, daß $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\Re(p_v)}{1 + |p_v|^2}$ divergiert.**)*

Hierbei dürfen die stetigen Funktionen auch komplexe Werte annehmen, sind also allgemein von der Form

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

wo $\varphi(x), \psi(x)$ reelle stetige Funktionen sind.

Offenbar gilt der Weierstraßsche Satz auch für komplexe Funktionen reeller Veränderlichen, denn man braucht ja nur $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gesondert zu approximieren; natürlich werden jetzt die Näherungspolynome von $f(x)$ komplexe Koeffizienten haben.

In § 1 erinnere ich an einen längst bekannten Determinantensatz; in § 2 beweise ich einen Satz über Approximation im Mittel; in § 3 beweise ich den Satz I. In § 4 beschäftige ich mich mit Approximationen durch trigonometrische Funktionen; schon der Satz I gestattet hierauf bezügliche Schlüsse. Weitere Resultate leite ich auf anderem Wege ab. Insbesondere wird bewiesen, daß die Funktionenfolge

$$1, x, \cos q_v x, \sin q_v x, q_v \neq q_\mu > 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

sicher dann eine Basis in jedem endlichen Intervall darstellt, wenn für

ein positives δ die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{e^{q_v^{1+\delta}}}$ divergiert.

*) Ich werde hierfür gelegentlich kurz Basis sagen.

**) In der Exponentenfolge muß die Null vorkommen, denn sonst wäre schon $f(x) \equiv 1$ im Nullpunkte nicht mit beliebiger Genauigkeit approximierbar.

Die Voraussetzung $p_v \neq p_\mu$ bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn für unser Problem ist es gleichgültig, ob ein Exponent nur einmal oder öfter vorkommt.

$\Re(x)$ bedeutet — wie üblich — den reellen Teil von x . — Unter x^{p_v} will ich den Hauptwert dieses vieldeutigen Ausdrucks verstehen.

Der von Herrn Müntz bewiesene Satz ist in Satz I enthalten; man vgl. § 3.

§ 1.

Ein Determinantensatz.

In der Determinante n^{ten} Grades $[a_{ik}]_1^n$ sei

$$a_{ik} = \frac{1}{q_i + r_k},$$

dann ist ihr Wert*)

$$D_n = \frac{\prod_{i > k} (q_i - q_k) (r_i - r_k)}{\prod (q_i + r_k)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Ist insbesondere

$$q_i = s_i + \frac{1}{2}, \quad r_i = \bar{s}_i + \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)^{**}),$$

so ist

$$(2) \quad \left[\frac{1}{s_i + \bar{s}_k + 1} \right]_1^n = \frac{\prod_{i > k}^{1, n} |s_i - s_k|^2}{\prod_{i, k=1}^n (s_i + \bar{s}_k + 1)}.$$

§ 2.

Über die Approximation im Mittel.

Sei

$$(3) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, die nur der Bedingung unterworfen sind:

$$(3') \quad \lambda_\nu + \lambda_\mu, \quad \Re(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots);$$

$f(x)$ sei eine (reelle oder komplexe) stetige Funktion der reellen Veränderlichen x im Intervall $(0, 1)$. Wenn es zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε einen Ausdruck

$$\alpha_1 x^{\lambda_1} + \alpha_2 x^{\lambda_2} + \dots + \alpha_n x^{\lambda_n}$$

*) A. Cauchy, Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées [Exercices d'analyse et de phys. math. II (1841), S. 151—159 (Oeuvres complètes 2^e sér. XII, im Erscheinen)]. — Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Professor Jacobi über die hyperelliptischen Transzendenten [Journal für die reine und angewandte Mathematik 40 (1850), S. 319—360], S. 350—351. — F. Joachimsthal, Bemerkungen über den Sturmschen Satz [ebenda 48 (1854), S. 386—416], S. 414. — R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, vierte Aufl., Leipzig 1875, S. 92—94. — S. Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, zweite Aufl., Erlangen 1877, S. 111—112. — Th. Muir, The Theory of Determinants in the historical Order of Development, London, Vol. I second edition 1906, S. 342—346; Vol. II 1911, S. 171—172.

**) \bar{s}_i bedeutet die zu s_i konjugierte komplexe Zahl.

gibt für den

$$\int_0^1 |f(x) - (\alpha_1 x^{i_1} + \dots + \alpha_n x^{i_n})|^2 dx < \varepsilon$$

wird, so sagt man, $f(x)$ sei durch die Funktionenfolge

$$(4) \quad x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3}, \dots$$

im Mittel approximierbar im Intervall $(0, 1)$. Ist die Funktion gleichmäßig approximierbar, so ist sie offenbar auch im Mittel approximierbar im betrachteten Intervall. Daher ist die Approximierbarkeit im Mittel eine notwendige Bedingung für die gleichmäßige Approximierbarkeit. Ich beweise nun den

Satz A. *Dafür, daß jede stetige Funktion im Intervall $(0, 1)$ durch die Folge (4) im Mittel approximierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$\sum_1^\infty \frac{1 + 2\Re(\lambda_r)}{1 + |\lambda_r|^2}$ *divergiert. Dabei sind die λ_r der Bedingung (3') unterworfen.*)*

Beweis. Sei λ_0 eine positive ganze Zahl oder Null und

$$\lambda_0 + \lambda_v \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

(Wenn ein solches λ_0 nicht existiert, so genügt es, sich auf den Weierstraßschen Satz zu berufen.)

Ich bestimme zunächst das Minimum des Ausdrucks

$$\int_0^1 |x^{\lambda_0} + u_1 x^{i_1} + \dots + u_n x^{i_n}|^2 dx$$

bei beliebiger Veränderlichkeit der komplexen Variablen u_1, u_2, \dots, u_n . Es handelt sich darum, das Minimum m_n der positiv definiten Hermiteschen Form

$$\sum_{r, \mu=0}^n c_{r\mu} u_r \bar{u}_\mu, \quad c_{r\mu} = \int_0^1 x^{i_r + \bar{i}_\mu} dx = \frac{1}{i_r + \bar{i}_\mu + 1},$$

unter der Nebenbedingung $u_0 = 1$ zu bestimmen.**) Man überzeugt sich leicht***), daß die gesuchte Größe den Wert hat:

*) Wie aus dem Beweis ersichtlich ist, bleibt die Bedingung unverändert, wenn man sich auf reelle stetige Funktionen beschränkt.

**) Bei der Auswertung von $c_{r\mu}$ kommt die Voraussetzung $\Re(i_r) > -\frac{1}{2}$ zur Anwendung.

***) Offenbar existiert das Minimum; setzt man nun $u_r = v_r + i w_r$, so erhält man

$$m_n = \frac{[c_{\nu\mu}]_0^n}{[c_{\nu\mu}]_1^n},$$

also, mit Rücksicht auf (2):

$$m_n = \frac{\prod_{\nu > \mu}^{0, n} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|^2}{\prod_{\nu, \mu=0}^n (\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1)} : \frac{\prod_{\nu > \mu}^{1, n} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|^2}{\prod_{\nu, \mu=1}^n (\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1)},$$

und hieraus

$$m_n = \frac{1}{2\lambda_0 + 1} \prod_{\nu=1}^n \left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \bar{\lambda}_0 + 1} \right|^2.$$

Offenbar ist

$$0 < m_{n+1} < m_n,$$

so daß also $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$ immer existiert; x^{λ_0} ist durch die Folge (4) im Mittel approximierbar oder nicht, je nachdem $m=0$ oder $m>0$ ist. Setzt man nun

$$\lambda_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

so wird

$$\left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \bar{\lambda}_0 + 1} \right|^2 = \frac{(\sigma_\nu - \lambda_0)^2 + \tau_\nu^2}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} = 1 - \gamma_\nu,$$

wobei

$$\gamma_\nu = \frac{(2\sigma_\nu + 1)(2\lambda_0 + 1)}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} > 0$$

ist. Also ist $m=0$, wenn $\sum_1^\infty \gamma_\nu$ divergiert, und $m>0$, wenn $\sum_1^\infty \gamma_\nu$ konvergiert. Nun folgt aus der Beziehung

$$\frac{1 + 2\sigma_\nu}{1 + \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2} = \frac{1 + 2\sigma_\nu}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(\lambda_0 + 1)(2\sigma_\nu - \lambda_0)}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2}}$$

unmittelbar, daß die Reihen

$$\sum_1^\infty \gamma_\nu \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty \frac{1 + 2\sigma_\nu}{1 + \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2}$$

eine reelle quadratische Funktion in den σ_ν, τ_ν und findet durch Differenzieren für das Minimum die Bedingungen

$$\sum_0^n c_{\nu\mu} u_\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

und hierzu tritt demnach die Gleichung (wegen $\bar{u}_0 = 1$)

$$\sum_0^n c_{\nu 0} u_\nu = m_n;$$

berechnet man aus dem so entstehenden Gleichungssystem u_ν und beachtet, daß $u_0 = 1$ sein muß, so erhält man unmittelbar für m_n den oben angegebenen Wert.

gleichzeitig konvergieren oder divergieren. Wenn also $\sum_1^{\infty} \frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2}$ divergiert, so ist jede Potenz x^{λ_0} ($\lambda_0 = 0, 1, 2, \dots$) und demnach, mit Anwendung des Weierstraßschen Satzes, auch jede stetige Funktion durch die Folge (4) im Mittel approximierbar; ist dagegen $\sum_1^{\infty} \frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2}$ konvergent, so ist keine Potenz $\lambda_0 + \lambda_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) durch die Folge (4) im Mittel approximierbar, und das konvergente unendliche Produkt $\frac{1}{2\lambda_0+1} \prod_1^{\infty} \left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \lambda_0 + 1} \right|^2$ stellt die untere Schranke der im Mittel erreichbaren Annäherung von x^{λ_0} im Intervall $(0, 1)$ dar.

Damit ist Satz A bewiesen; insbesondere folgt hieraus als notwendige Bedingung, daß die Folge (1) unendlich viele Glieder enthalten muß.

Übrigens ist unter denselben Bedingungen auch jede samt dem Quadrate ihres absoluten Betrages im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion durch die Folge (4) im Mittel approximierbar, denn jede solche Funktion ist durch stetige Funktionen im Mittel approximierbar. Ist nämlich $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ die betrachtete Funktion, so liefern die Partialsummen der zu $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gehörigen Fourierschen Entwicklungen das Gewünschte.

Hieraus folgt nach einer bekannten Schlußweise der

Satz B. Sei $\chi(x) = f_1(x) + if_2(x)$, wo $f_1(x), f_2(x)$ samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktionen bedeuten; ferner sei für das Funktionensystem (4):

$$(5) \quad \int_0^1 \bar{\chi}(x) x^{\lambda_\nu} dx = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)^*)$$

und $\sum_1^{\infty} \frac{1+2\Re(\lambda_\nu)}{1+|\lambda_\nu|^2}$ divergent; dann ist höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null $\chi(x) = 0$. Man drückt dies auch so aus: das Funktionensystem (4) ist vollständig im Intervall $(0, 1)$.

Man kann nämlich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε die Zahlen c_1, \dots, c_n so bestimmen, daß

$$\int_0^1 |\chi(x) + c_1 x^{\lambda_1} + \dots + c_n x^{\lambda_n}|^2 dx < \varepsilon$$

wird, und hieraus folgt nach (5):

*) Hier ist $\bar{\chi}(x) = f_1(x) - if_2(x)$.

$$\int_0^1 \{ |\chi(x)|^2 + |c_1 x^1 + \dots + c_n x^{2n}|^2 \} dx < \varepsilon,$$

also um so mehr

$$\int_0^1 |\chi(x)|^2 dx < \varepsilon,$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Ist insbesondere $\chi(x)$ eine stetige den Gleichungen (5) genügende Funktion, so muß sie identisch verschwinden^{*)}; man drückt dies so aus: das Funktionensystem (4) ist abgeschlossen im Intervall (0, 1). Eine im Intervall (0, 1) stetige Funktion $\varphi(x)$ ist also durch ihre Konstanten

$$\int_0^1 \overline{\varphi}(x) x^{\lambda_\nu} dx \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

völlig bestimmt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß $\Re(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2}$, $\lambda_\nu + \lambda_\mu$ und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + 2\Re(\lambda_\nu)}{1 + |\lambda_\nu|^2} \text{ divergiert.}$$

Diese Sätze übertragen sich unmittelbar auf ein Intervall (0, b), wo b eine beliebige reelle Zahl ist.

§ 3.

Beweis des Satzes I.

Wir betrachten nun die Folge (1); nach unserem Satz A ist die Divergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + 2\Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|^2}$ eine notwendige Bedingung dafür, daß die Folge (1) eine Basis sei. Da aber $\Re(p_\nu) > 0$ vorausgesetzt wurde, so darf die obige Reihe durch $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + \Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|^2}$ ersetzt werden. Hiermit ist der erste Teil des Satzes I bewiesen; um auch den zweiten Teil zu beweisen, approximiere

^{*)} Für $\lambda_\nu = \nu - 1$ gaben hierfür schon Herr Lerch, Stieltjes, ferner die Herren Phragmén, Landau und Fejér Beweise. Man vgl. E. Landau, Über die Approximation einer stetigen Funktion durch ganze rationale Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 25 (1908), S. 337—346], und die daselbst angeführte Literatur. — Fejér, a. a. O., S. 99. — Vgl. ferner: C. N. Moore, On Certain Constants Analogous to Fourier's Constants [Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 14 (1908), S. 368—378; vol. 15 (1909), S. 116]. — Müntz, a. a. O., S. 304—305.

ich zunächst die Potenz x^λ ($\lambda \geq 1$). Zu diesem Zwecke wende ich den Satz A auf die Funktion $x^{\lambda - \frac{1}{2}}$ und die Potenzfolge

$$\lambda_r = p_r - \frac{1}{2} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

an. Dies ist gestattet, denn die Divergenz der Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Re(p_r)}{1 + |p_r - \frac{1}{2}|^2}$ folgt

aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Re(p_r)}{1 + |p_r|^2}$.*) Zu einer beliebig klein vorgegebenen positiven Zahl ε gibt es also einen Ausdruck

$$a_1 x^{p_1 - \frac{1}{2}} + a_2 x^{p_2 - \frac{1}{2}} + \dots + a_n x^{p_n - \frac{1}{2}}$$

derart, daß

$$(6) \quad \int_0^1 \left| x^{\lambda - \frac{1}{2}} + a_1 x^{p_1 - \frac{1}{2}} + \dots + a_n x^{p_n - \frac{1}{2}} \right|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{(\lambda + 1)^2}$$

wird. Nun ist offenbar

$$\frac{x^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} + \frac{a_1 x^{p_1 + \frac{1}{2}}}{p_1 + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{a_n x^{p_n + \frac{1}{2}}}{p_n + \frac{1}{2}} = \int_0^x \left(z^{\lambda - \frac{1}{2}} + a_1 z^{p_1 - \frac{1}{2}} + \dots + a_n z^{p_n - \frac{1}{2}} \right) dz,$$

also

$$(7) \quad \left| \frac{x^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} + a_1 \frac{x^{p_1 + \frac{1}{2}}}{p_1 + \frac{1}{2}} + \dots + a_n \frac{x^{p_n + \frac{1}{2}}}{p_n + \frac{1}{2}} \right| \leq \int_0^x \left| z^{\lambda - \frac{1}{2}} + a_1 z^{p_1 - \frac{1}{2}} + \dots + a_n z^{p_n - \frac{1}{2}} \right| dz.$$

*) Diese beiden Reihen konvergieren oder divergieren sogar gleichzeitig, denn es ist

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Re(p_r)}{1 + |p_r - \frac{1}{2}|^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Re(p_r)}{1 + |p_r|^2} \cdot \frac{1 + |p_r|^2}{1 + |p_r - \frac{1}{2}|^2},$$

und

$$1 + \left| p_r - \frac{1}{2} \right|^2 \leq 1 + 2 \left(|p_r|^2 + \frac{1}{4} \right) < 2(|p_r|^2 + 1),$$

$$1 + \left| p_r - \frac{1}{2} \right|^2 \geq 1 + \left(|p_r| - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 1 + \frac{1}{2} \left(|p_r|^2 - \frac{1}{4} \right) > \frac{1}{2} (|p_r|^2 + 1)$$

oder

$$\frac{1}{2} < \frac{1 + |p_r|^2}{1 + \left| p_r - \frac{1}{2} \right|^2} < 2.$$

Wendet man ferner die bekannte Ungleichung:

$$\left(\int_a^b g(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b g^2(x) dx$$

an, so folgt aus (7) und (6)

$$\left| \frac{x^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} + a_1 \frac{x^{p_1 + \frac{1}{2}}}{p_1 + \frac{1}{2}} + \dots + a_n \frac{x^{p_n + \frac{1}{2}}}{p_n + \frac{1}{2}} \right| \leq x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{\lambda + 1} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1,$$

und hieraus

$$\left| x^\lambda + \frac{a_1 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)}{p_1 + \frac{1}{2}} x^{p_1} + \dots + \frac{a_n \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)}{p_n + \frac{1}{2}} x^{p_n} \right| \leq s \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Also ist jede positive ganze Potenz durch die Folge (1) gleichmäßig approximierbar; daraus folgt aber durch Anwendung des Weierstraßschen Satzes, daß auch jede stetige Funktion gleichmäßig approximierbar ist.

Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen. Man kann diesen Satz noch ein wenig verschärfen; aus dem Beweise ist nämlich ersichtlich, daß man bei der Approximation der positiven Potenz x^λ ($\lambda \geq 1$) das Glied 1 in der Potenzfolge (1) fortlassen darf. Nun ist aber jede für $x=0$ verschwindende, im Intervall $(0, 1)$ stetige Funktion daselbst durch die Potenzfolge

$$x, x^2, x^3, \dots$$

gleichmäßig approximierbar; denn ist $f(x)$ stetig und $f(0) = 0$, so gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl ε nach dem Weierstraßschen Satze ein solches Polynom $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ daß

$$|f(x) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1)$$

ist. Setzt man hierin $x=0$, so ergibt sich

$$|a_0| < \varepsilon,$$

und hieraus folgt leicht, daß auch

$$|f(x) - (a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)| < 2\varepsilon$$

ist. Es ergibt sich so der schärfere

Satz I'. *Dafür, daß die Potenzfolge*

$$(1') \quad x^{p_1}, x^{p_2}, \dots, x^{p_\nu + p_\mu}, \quad \Re(p_\nu) > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

eine Basis aller für $x=0$ verschwindenden, im Intervall $(0, 1)$ stetigen Funktionen sei, ist notwendig, daß

divergiert, und hinreichend, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|} \text{ divergiert.}$$

Gibt es eine Zahl $\alpha > 0$ derart, daß

$$\Re(p_v) \geq \alpha \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, so läßt sich offenbar die notwendige Bedingung durch die folgende ersetzen: $\sum_1^{\infty} \frac{\Re(p_v)}{1 + |p_v|^2}$ muß divergieren; und diese Bedingung ist jetzt gleichbedeutend mit der Divergenz der Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{\Re(p_v)}{|p_v|^2}$, wie aus der Beziehung

$$\sum_1^{\infty} \frac{\Re(p_v)}{1 + |p_v|^2} = \sum_1^{\infty} \frac{\Re(p_v)}{|p_v|^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{|p_v|^2}}$$

unmittelbar hervorgeht.

Also fällt die notwendige Bedingung hier mit der hinreichenden zusammen, und man kann den Satz aussprechen:

Satz I". Durch die Potenzensfolge

$$x^{p_1}, x^{p_2}, x^{p_3}, \dots,$$

in der

$$p_v + p_\mu, \quad \Re(p_v) \geq \alpha > 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, läßt sich dann und nur dann jede für $x = 0$ verschwindende, im Intervall $(0, 1)$ stetige Funktion gleichmäßig approximieren, wenn $\sum_1^{\infty} \frac{\Re(p_v)}{|p_v|^2}$ divergiert.

Sind die p_v reell und positiv und ist $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v = 0$, so besagt die notwendige Bedingung, daß die Folge (1') unendlich viele Glieder enthält, und die hinreichende Bedingung besteht in der Divergenz der Reihe $\sum_1^{\infty} p_v$. Es gilt also der

Satz I". Ist $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v = 0$, $p_v > 0$, und $\sum_1^{\infty} p_v$ divergent, so ist durch die Potenzensfolge

$$x^{p_1}, x^{p_2}, x^{p_3}, \dots$$

jede für $x = 0$ verschwindende, im Intervall $(0, 1)$ stetige Funktion gleichmäßig approximierbar.*)

*) Herr Müntz teilte mir gelegentlich vor längerer Zeit mit, daß er für diesen Fall folgendes beweisen kann:

1) Die Divergenz der Reihe $\sum_1^{\infty} p_v$ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß die Folge (1) eine Basis sei.

Die Transformation $x = sb$ zeigt unmittelbar, daß diese Sätze auch für das Intervall $(0, b)$ gelten.

§ 4.

Über die Approximation durch trigonometrische Funktionen.

Setzt man in den Satz I'

$$p_\nu = 1 + i\tau_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \quad \tau_\nu \neq \tau_\mu,$$

ein und beschränkt man sich auf reelle Funktionen, so folgt, daß jede im Intervall $(0, b)$ stetige, für $x = 0$ verschwindende Funktion durch die Folge

$$(8) \quad x \cos(\tau_\nu \log x), \quad x \sin(\tau_\nu \log x) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

gleichmäßig approximiert werden kann, wenn nur $\sum_1^\infty \frac{1}{1+\tau_\nu^2}$ divergiert.*)

Hieraus folgt, daß unter derselben Bedingung durch die Funktionenfolge

$$(9) \quad e^{-s} \cos \tau_\nu s, \quad e^{-s} \sin \tau_\nu s \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

jede im Intervall $a \leq s \leq +\infty$ stetige, für $s \rightarrow +\infty$ verschwindende Funktion gleichmäßig approximierbar ist.

Sei nämlich

$$e^{-s} = x, \quad b = e^{-a} \quad (a \text{ reell});$$

um nun eine im Intervall $a \leq s \leq +\infty$ stetige, für $s \rightarrow +\infty$ verschwindende Funktion $f(s)$ durch die Folge (9) gleichmäßig zu approximieren, genügt es, die Funktion $f(-\log x)$ im Intervall $0 \leq x \leq b$ durch die Folge (8) zu approximieren. Wobei offenbar $f(-\log x)$ für $x \rightarrow +0$ verschwindet.

In einem endlichen Intervall (a, d) läßt sich also um so mehr die Funktion $e^{-s}f(s)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form entwickeln:

$$e^{-s}f(s) = e^{-s} \sum_1^\infty P_\nu(s),$$

wo $P_\nu(s)$ ein linearer Ausdruck der Funktionen

$$\cos \tau_\nu s, \quad \sin \tau_\nu s \quad (\nu = 1, 2, \dots, \nu)$$

2) Im Falle $p_\nu = \frac{1}{\nu}$ ist die Folge (1) sicher eine Basis.

Anmerkung bei der Korrektur (24. März 1916):

Der Beweis von (2) findet sich in seiner vor Kurzem erschienenen Arbeit: Approximation willkürlicher Funktionen durch Wurzeln [Archiv der Math. und Phys. III. R., 24. Bd. (1916), S. 310—316], während der Beweis von 1) bisher meines Wissens nicht veröffentlicht ist.

*) Es ist durchweg der Hauptwert des Logarithmus gemeint.

ist. Hieraus erhält man die Gleichung

$$f(s) = \sum_1^{\infty} P_\nu(s) \quad (a \leq s \leq d),$$

und es ist also die Funktionenfolge

$$\cos \tau_\nu s, \quad \sin \tau_\nu s \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Basis aller stetigen Funktionen in jedem endlichen Intervall, wenn nur

die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{1 + \tau_\nu^2}$ divergiert.

Ähnliche Sätze allgemeinerer Art leite ich auf anderem Wege ab.

Wir beweisen den

Satz II. Die Funktionenfolge

$$1, x, s \cos \varrho_\nu x + t \sin \varrho_\nu x, \quad \varrho_\nu + \varrho_\mu > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

stellt sicherlich eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall (a, d) ($a \geq 0$ falls $s \cdot t = 0$) dar, wenn es eine positive Zahl δ gibt, für die

$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\varrho_\nu^{1+\delta}}$ divergiert. Hierbei sollen s und t beliebige reelle Zahlen be-

deuten, die nicht beide verschwinden.

Zu diesem Zwecke zeige ich zunächst, daß die Funktionenfolge

$$(10) \quad s \cos \varrho_\nu x + t \sin \varrho_\nu x \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

unter der Bedingung, daß

$$(11) \quad \varrho_\nu + \varrho_\mu > 0, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\varrho_\nu^{1+\delta}}$$

divergiert, im Intervall (a, d) abgeschlossen ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde es eine nicht identisch verschwindende stetige Funktion $f(x)$ geben, für die

$$(12) \quad \int_a^d f(x) (s \cos \varrho_\nu x + t \sin \varrho_\nu x) dx = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, so daß also die Funktion

$$F(\lambda) = \int_a^d f(x) (s \cos \lambda x + t \sin \lambda x) dx$$

an den Stellen $\lambda = \varrho_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) verschwinden würde. Nun ist aber $F(\lambda)$ offenbar eine ganze transzendente Funktion, und es ist

$$|F(\lambda)| \leq \int_a^d |f(x)| (|s| + |t|) e^{\lambda(|d| + |a|)} dx,$$

das heißt

$$(13) \quad F(\lambda) \leq \alpha e^{\beta|\lambda|},$$

wo α, β geeignet gewählte Konstanten bedeuten. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß $F(\lambda)$ nicht identisch verschwindet; dies würde nämlich besagen, daß

$$s \int_a^d f(x) x^{2\nu} dx = 0, \quad t \int_a^d f(x) x^{2\nu+1} dx = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

ist. Dies ist aber nach den vorausgegangenen Resultaten nicht möglich, wenn wir noch voraussetzen, daß die Zahlen s und t beide von Null verschieden sind, oder daß der Nullpunkt nicht im Innern des Intervalls (a, d) liegt. Denn die Potenzfolge

$$1, x, x^2, \dots, x^\nu, \dots$$

ist in jedem endlichen Intervall abgeschlossen, und jede der Potenzfolgen

$$1, x^2, x^4, \dots, x^{2\nu}, \dots, \\ x, x^3, x^5, \dots, x^{2\nu+1}, \dots$$

ist abgeschlossen in einem Intervall, das den Nullpunkt nicht im Innern enthält.

Wenn nun $F(\lambda)$ unendlich viele von Null verschiedene Nullstellen besitzt:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \quad 0 < |\lambda_\nu| \leq |\lambda_{\nu+1}|,$$

so folgt aus (13) nach einem wohlbekannten Satze, daß

$$|\lambda_\nu| > c \cdot \nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, wo c eine geeignet gewählte positive Konstante bedeutet. Also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|^{1+\delta}} \text{ konvergiert für jedes } \delta > 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung (11) kann also (12) nicht bestehen, das heißt die Funktionenfolge (10) ist abgeschlossen im Intervall (a, d) .

Nun lautet aber ein Satz des Herrn E. Schmidt:*)

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\nu(x), \dots$ eine unendliche Reihe für das abgeschlossene Intervall $a \leq x \leq b$ definierter, reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden; dann läßt sich jede für $a \leq x \leq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen

$$1, x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_\nu(x), \dots$$

gleichmäßig konvergent entwickeln.

*) A. a. O., S. 476.

Durch Anwendung dieses Satzes ergibt sich nun unmittelbar der Satz II. Insbesondere ist also

$$1, x, \cos \varrho, x \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

bzw.

$$1, x, \sin \varrho, x \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Basis im Intervall (a, d) ($a \geq 0$); und

$$1, x, \cos \varrho, x + \sin \varrho, x$$

eine Basis in jedem endlichen Intervall.

Der Satz läßt sich leicht auf komplexe ϱ , erweitern und das Glied x in der Funktionenfolge darf fortgelassen werden, wie ich an anderer Stelle*) ausführe.

*) Folytonos függvények megközelítése adott függvénysorozatból képezett lineáris kifejezésekkel. Erscheint demnächst in den „Mathematikai és Fizikai Lapok“.

Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

GEORG PÓLYA in Zürich.

1. Herr Borel*) hat im Jahre 1894 folgenden Satz bewiesen:

Die analytische Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

sei im Kreise $|x| \leq 1$ eindeutig und, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Polen, regulär. Wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ihrer Potenzreihenentwicklung um den Punkt $x = 0$ ganze rationale Zahlen sind, so ist $f(x)$ eine rationale Funktion.

Ich habe vor kurzem**) folgenden Satz bewiesen: wenn $g(x)$ eine ganze transzendente Funktion ist, so können nicht alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ der Entwicklung

$$g\left(\frac{1}{x-c}\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

ganze rationale Zahlen sein. — Die Funktion $g\left(\frac{1}{x-c}\right)$ hat in der ganzen Ebene den einzigen singulären Punkt $x = c$; da dieser aber ein wesentlich singulärer Punkt ist, so ist dieser letzte Satz nicht im ersten enthalten.

Ich werde nun in der vorliegenden Abhandlung einen Satz beweisen, der beide erwähnten Resultate umfaßt, nämlich den folgenden

Satz I. Es sei $R > 1$. Die analytische Funktion

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

sei im Kreise $|x| \leq R$ eindeutig, und, abgesehen von einer endlichen Anzahl von singulären Stellen, regulär. Wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ihrer Potenzreihenentwicklung um den Punkt $x = 0$ ganze rationale Zahlen sind, so ist $f(x)$ eine rationale Funktion.

*) Borel, Sur une application d'un théorème de M. Hadamard. Bulletin des sciences mathématiques, 2^{te} Folge, Bd. 18, S. 22—25.

**) Pólya, Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. d. C. M. di Palermo, Bd. 40, S. 1—16.

Dieser Satz enthält den erwähnten Satz von Borel. Denn unter den Bedingungen des Borelschen Satzes ist, nach den allgemeinen Prinzipien der Funktionentheorie, die Existenz eines Kreises $|x| \leq R$ ($R > 1$) gesichert, in welchem die Funktion $f(x)$ eindeutig ist und keine anderen Singularitäten besitzt, als im Kreise $|x| \leq 1$; er geht aber über den Borelschen Satz hinaus, weil er über die Natur der singulären Punkte im Kreise $|x| \leq R$ nichts voraussetzt, so daß insbesondere dieser Kreis auch isolierte wesentlich singuläre Stellen enthalten könnte. Hierdurch wird zwar der Beweis des Satzes I bedeutend komplizierter, als der des Borelschen Satzes, seine Konsequenzen sind aber auch viel mannigfaltiger.

Ich werde den Beweis in den §§ 2–6, die erwähnten Konsequenzen in den §§ 7–9 entwickeln. Ich schicke nur eine ganz spezielle Folgerung voraus, um das Interesse für den Satz I zu erwecken. Es seien

$$Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x), \quad R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)$$

beliebige rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten (d. h. sowohl der Zähler als auch der Nenner sollen rationale Koeffizienten besitzen), sie seien nur den Bedingungen

$$Q_j(x) \neq 0, \quad R_j(0) = 0, \quad R_j(x) \neq R_k(x) \\ (j, k = 1, 2, \dots, n; j \geq k)$$

unterworfen. Die Funktion

$$Q_1(x) e^{R_1(x)} + Q_2(x) e^{R_2(x)} + \dots + Q_n(x) e^{R_n(x)}$$

ist eindeutig, sie hat nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte, und sie kann sich nie auf eine rationale Funktion reduzieren*). Ihre Potenzreihenentwicklung um den Punkt $x = 0$ wird bei jeder Wahl von $Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n$ nur rationale Koeffizienten enthalten, aber diese Koeffizienten können, kraft des Satzes I, bei keiner Wahl von $Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n$ sämtlich ganze Zahlen sein.

2. Ich kann ohne Beschränkung voraussetzen, daß die Funktion $f(x)$ an der Kreisperipherie $|x| = R$ keinen singulären Punkt hat. Denn wäre das der Fall, so könnte ich den Kreis $|x| \leq R$ durch einen passend gewählten kleineren konzentrischen Kreis ersetzen, der sowohl die Voraussetzung des Satzes I, wie auch die neu auferlegte Bedingung erfüllen würde.

*) Nach einer leichten Umformung ist der Beweis ebenso (durch vollständige Induktion und Differenzieren) zu führen, wie im geläufigen Falle, wo Q_j Polynome und R_j Polynome ersten Grades sind. Vgl. z. B. Picard, *Traité d'Analyse*, Bd. III, S. 427.

Die Funktion $f(x)$ soll im Kreise $|x| \leq R$ s singuläre Punkte haben, die mit

$$\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_s}$$

bezeichnet werden mögen. Nach dem eben Gesagten ist

$$\frac{1}{|c_v|} < R \quad (v = 1, 2, \dots, s).$$

Die Funktion $f(x)$ ist in der Umgebung des Punktes c_v^{-1} eindeutig und kann daher in eine Launtsche Reihe entwickelt werden, deren Hauptteil mit

$$G_v \left(\frac{1}{c_v x - 1} \right)$$

bezeichnet werden soll. $G_v(x)$ ist eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion der Variablen x , je nach der Art der Singularität im Punkte $x = c_v^{-1}$, und es kann

$$(2) \quad G_v(0) = 0$$

vorausgesetzt werden.

Die Funktion

$$f(x) - \sum_{v=1}^s G_v \left(\frac{1}{c_v x - 1} \right) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots$$

ist im Kreise $|x| \leq R$ eindeutig und regulär. Folglich ist der Konvergenzradius der rechts stehenden Potenzreihe größer als R und so kann die Ungleichung

$$(3) \quad |b_n| R^n < 1$$

höchstens für eine endliche Anzahl Werte von n unrichtig sein.

Man wähle eine positive Zahl $r (r > 0)$, die sämtlichen Ungleichungen

$$(4) \quad r < \frac{1}{|c_v|}$$

genügt. Der Konvergenzradius der Potenzreihe (1) ist größer als r , und daher ist die Ungleichung

$$(5) \quad |a_n| r^n < 1$$

höchstens für eine endliche Anzahl Werte von n nicht erfüllt.

Es kann gewiß

$$(6) \quad r < 1$$

angenommen werden, aber man wird auch zu dieser Annahme genötigt, wenn man Trivialitäten ausweichen will. Denn ist (6) nicht erfüllt, so muß die Potenzreihe (1) wegen (5) und wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten a_n sich auf ein Polynom reduzieren.

3. Mein Beweis stützt sich wesentlich auf den folgenden wichtigen Satz des Herrn Wigert*):

Dafür, daß die durch die Potenzreihenentwicklung

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots + D_n x^n + \dots = H\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

definierte Funktion $H(x)$ eine ganze Funktion der Variablen x mit der Eigenschaft

$$H(0) = 0$$

sei, ist notwendig und hinreichend, daß eine ganze Funktion

$$h(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_k x^k + \dots$$

existiere, die folgende drei Eigenschaften besitzt:

$$h(0) = D_0, \quad h(1) = D_1, \quad h(2) = D_2, \quad \dots, \quad h(n) = D_n, \quad \dots,$$

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k |d_k|^{\frac{1}{k}} = 0,$$

$$(8) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg |h(re^{i\vartheta})|}{r} \leq 0$$

gleichmäßig für $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Jede der beiden ganzen Funktionen $H(x)$ und $h(x)$ ist durch die andere eindeutig bestimmt, und sie sind entweder beide rational oder beide transzendent.

Von den beiden Bedingungen (7) und (8) genügt es übrigens immer nur die eine zu verifizieren, denn sie sind äquivalent.

Auf Grund des Wigertschen Satzes läßt sich eine ganze Funktion

$$g_\nu(x) = d_{\nu,0} + d_{\nu,1}x + d_{\nu,2}x^2 + \dots + d_{\nu,k}x^k + \dots$$

bestimmen, so daß

$$G_\nu\left(\frac{1}{c_\nu x - 1}\right) = g_\nu(0) + g_\nu(1)c_\nu x + \dots + g_\nu(n)c_\nu^n x^n + \dots$$

gesetzt werden kann. Da ν nur einer endlichen Anzahl Werte fähig ist, kann die Bedingung (7) auch so ausgesprochen werden: bei vorgegebenem $s > 0$ ist die Ungleichung

$$(9) \quad |d_{\nu,k}| < \frac{\epsilon^k}{k!} \quad (\nu = 1, 2, \dots, s)$$

höchstens für eine endliche Anzahl Werte von k unrichtig.

Ich führe die ganze Funktion

$$g(x) = g_1(x)c_1^s + g_2(x)c_2^s + \dots + g_s(x)c_s^s$$

*) Wigert, Sur les fonctions entières, Oefversigt af K. Vetenskapakademiens Förhandlingar, Stockholm (1900), S. 1001–1011.

ein. Mit dieser neuen Bezeichnung läßt sich die Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{v=1}^s G_v \left(\frac{1}{c_v x - 1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (g(n) + b_n) x^n \end{aligned}$$

schreiben.

4. Ich definiere die Zahlen $C_{m,0}, C_{m,1}, \dots, C_{m,m}$ durch die in x identische Gleichung

$$(10) \quad \begin{aligned} C_{m,0} + C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 + \dots + C_{m,m}x^m \\ \equiv (1 - c_1 x)^m (1 - c_2 x)^m \dots (1 - c_s x)^m. \end{aligned}$$

Es ist also

$$C_{m,0} = 1, \dots, C_{m,m} = (-1)^{ms} c_1^m c_2^m \dots c_s^m.$$

Die Funktion $h(t)$ sei für $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ irgendwie erklärt. Ich setze*)

$$\begin{aligned} \square^m h(t) &= \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} h(t + ms - \mu) \\ &= h(t + ms) + C_{m,1} h(t + ms - 1) + \dots + C_{m,m} h(t). \end{aligned}$$

Sind $h_1(t)$ und $h_2(t)$ zwei beliebige Funktionen, so ist

$$\square^m (h_1(t) + h_2(t)) = \square^m h_1(t) + \square^m h_2(t).$$

Ich will den Wert von $\square^m h(t)$ für gewisse spezielle Funktionen $h(t)$ berechnen bzw. abschätzen. Ich betrachte zuerst $\square^m P(t) c_t^r$, wo

$$P(t) \equiv u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots + u_{m-1} t^{m-1}$$

ein beliebiges Polynom bedeutet, dessen Grad $\leq m-1$ ist. Man kann und zwar nur auf eine Weise m Konstanten $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$ bestimmen, so daß identisch in t

$$P(t) \equiv v_0 + v_1 \frac{t+1}{1} + v_2 \frac{t+1}{1} \frac{t+2}{2} + \dots + v_{m-1} \frac{t+1}{1} \dots \frac{t+m-1}{m-1}$$

*) Das Symbol \square^m hat die Eigenschaft

$$\square^m (\square^n h(t)) = \square^{m+n} h(t).$$

Ist $s = 1$, $c_1 = 1$ so ist in gewöhnlicher Bezeichnung

$$\square^m h(t) = \Delta^m h(t).$$

Vgl. übrigens Encyklopädie, Bd. I, Teil 2, S. 933—937.

wird. Wenn die rationale Funktion

$$\begin{aligned} & \frac{v_0}{1-c_r x} + \frac{v_1}{(1-c_r x)^2} + \cdots + \frac{v_{m-1}}{(1-c_r x)^m} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(v_0 + v_1 \frac{t+1}{1} + \cdots + v_{m-1} \frac{t+1}{1} \frac{t+2}{2} \cdots \frac{t+m-1}{m-1} \right) c_r^t x^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} P(t) c_r^t x^t \end{aligned}$$

mit dem Polynom (10) multipliziert wird, so wird daraus ein Polynom vom Grade $ms-1$. Daher verschwindet in der Produktenreihe der Koeffizient von x^{t+ms} für $t=0, 1, 2, 3, \dots$ d. h. es wird

$$(11) \quad \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} P(t+ms-\mu) c_r^{t+ms-\mu} = \square^m P(t) c_r^t = 0.$$

Die Gleichung (11) ist also unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Grad des Polynoms $P(t) \leq m-1$ ist. Ist der Grad $\geq m$, so ist das Resultat viel komplizierter, und so will ich mich mit der Abschätzung von $\square^m t^k c_r^t$ für beliebige k begnügen. Es ist

$$\begin{aligned} \square^m t^k c_r^t &= \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} (t+ms-\mu)^k c_r^{t+ms-\mu}, \\ |\square^m t^k c_r^t| &\leq \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| (t+ms-\mu)^k |c_r|^{t+ms-\mu}, \\ &\leq (t+ms)^k |c_r|^t \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| |c_r|^{ms-\mu}, \\ &\leq (t+ms)^k |c_r|^t (|c_r| + |c_1|)^m (|c_r| + |c_2|)^m \cdots (|c_r| + |c_s|)^m \end{aligned}$$

mit Berücksichtigung von (10), nach der geläufigen Majorantenmethode. Endlich kommt mit Rücksicht auf (4)

$$(12) \quad |\square^m t^k c_r^t| < (t+ms)^k \left(\frac{1}{r}\right)^t \left(\frac{3}{r}\right)^{ms}.$$

Die gewonnene Ungleichung (12) ist für jeden Wert von k richtig, aber nur für $k \geq m$ von Interesse.

Ich will nun zur Abschätzung von $\square^m g(t)$ schreiten. Es ist

$$\begin{aligned}\square^m g(t) &= \sum_{r=1}^s \square^m g_r(t) c_r^t = \sum_{r=1}^s \sum_{k=0}^{\infty} d_{r,k} \square^m t^k c_r^t \\ &= \sum_{r=1}^s \sum_{k=m}^{\infty} d_{r,k} \square^m t^k c_r^t\end{aligned}$$

mit Benutzung der Gleichung (11). Mit Benutzung der Ungleichung (12) erhält man

$$\begin{aligned}|\square^m g(t)| &\leq \sum_{r=1}^s \sum_{k=m}^{\infty} |d_{r,k}| |\square^m t^k c_r^t| \\ &\leq \sum_{r=1}^s \sum_{k=m}^{\infty} |d_{r,k}| (t+ms)^k \left(\frac{1}{r}\right)^{t+ms} 2^{ms}.\end{aligned}$$

Mit Benutzung der Ungleichung (9) gelangt man zur Ungleichung

$$|\square^m g(t)| < 2^{ms} \left(\frac{1}{r}\right)^{t+ms} s \sum_{k=m}^{\infty} \frac{s^k}{k!} (t+ms)^k,$$

die nicht immer richtig zu sein braucht, aber bei festem positivem ε nur für eine endliche Anzahl Werte von m falsch sein kann. Ist $\varepsilon < 1$, so gelangt man weiter zu der Ungleichung

$$|\square^m g(t)| < s 2^{ms} \left(\frac{1}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(t+ms)^k}{k!},$$

$$(13) \quad |\square^m g(t)| < s 2^{ms} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m.$$

Ich will noch

$$\square^m b_t = \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} b_{t+ms-\mu}$$

abschätzen. Durch Anwendung von (3) erhält man

$$\begin{aligned}|\square^m b_t| &\leq \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| \left(\frac{1}{R}\right)^{t+ms-\mu} = \left(\frac{1}{R}\right)^t \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| \left(\frac{1}{R}\right)^{ms-\mu} \\ &\leq \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + |c_1|\right)^m \left(\frac{1}{R} + |c_2|\right)^m \cdots \left(\frac{1}{R} + |c_s|\right)^m\end{aligned}$$

mit Benutzung der Formel (10) und der schon einmal angewandten

Majorantenmethode. Mit Benutzung von (4) gelangt man endlich zu der Ungleichung

$$(14) \quad |\square^m b_t| < \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms},$$

die höchstens für eine endliche Anzahl Werte von t nicht erfüllt ist.

5. Ob die Potenzreihe (1) eine rationale Funktion darstellt oder nicht, wird durch die Betrachtung der rekurrenten Determinanten

$$(15) \quad A_n^{(r)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+r-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+r-1} & a_{n+r} & \cdots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix} = |a_{n+i+k}| \quad (i, k=0, 1, 2, \dots, r-1)$$

entschieden. Die Zahlen $A_n^{(r)}$ sind sämtlich rational und ganz.

Ich will insbesondere die Determinanten $A_n^{(n)}$ und $A_n^{(n+1)}$ betrachten, und sie mit Hilfe des Symbols \square^m umformen. Es sei ein gewisser positiver echter Bruch α ($0 < \alpha < 1$) fest gewählt. Ich setze

$$m = \left[\alpha \frac{n}{s} \right].$$

Die so bestimmte ganze Zahl m tritt in den nun folgenden Formeln (16) (17) auf, die man durch Addition von Kolonnen erhält (die ersten ms Kolonnen bleiben ungeändert):

$$(16) \quad A_n^{(n)} = \begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_{n+ms-1} & \square^m a_n & \square^m a_{n+1} & \cdots & \square^m a_{2n-ms-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & \cdots & a_{2n+ms-2} & \square^m a_{2n-1} & \square^m a_{2n} & \cdots & \square^m a_{3n-ms-2} \end{vmatrix},$$

$$(17) \quad A_n^{(n+1)} = \begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_{n+ms-1} & \square^m a_n & \square^m a_{n+1} & \cdots & \square^m a_{2n-ms} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{2n+ms-1} & \square^m a_{2n} & \square^m a_{2n+1} & \cdots & \square^m a_{3n-ms} \end{vmatrix}.$$

Alle bisher gewonnenen Formeln und Ungleichungen werden nun zur Abschätzung der Determinanten (16) (17) vereinigt.

Wir müssen insbesondere $\square^m a_t$ für

$$(18) \quad n \leq t \leq 3n - ms$$

abschätzen. Dabei muß beachtet werden, daß m mit n ins Unendliche wächst. Es ist genauer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \frac{\alpha}{s},$$

so daß etwa die Ungleichung

$$(19) \quad \frac{\alpha}{2s} < \frac{m}{n} < \frac{2\alpha}{s}$$

nur für endlich viele Werte von n falsch sein kann. Ich behaupte, daß eine positive Zahl ε existiert, die für alle Werte n, m, t , die den Bedingungen (18) (19) genügen, die Ungleichung

$$(20) \quad s 2^{ms} \left(\frac{e}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m < \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms}$$

erfüllt. In der Tat, die Ungleichung (20) fordert das Bestehen von

$$\varepsilon < \left\{ \frac{r}{2e} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right\}^s \frac{1}{s^m} \left(\frac{r}{eR} \right)^{\frac{t}{m}}.$$

Gemäß (19) ist $m > 0$, also $m \geq 1$, und nach (18) (19) ist

$$\frac{t}{m} < \frac{3n}{m} < \frac{6s}{\alpha}.$$

Wird also

$$\varepsilon \leq \left\{ \frac{r}{2e} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right\}^s \frac{1}{s} \left(\frac{r}{eR} \right)^{\frac{6s}{\alpha}}, \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

gewählt, so wird (20) sicherlich erfüllt.

Unter Beachtung von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m = \infty$$

erhält man durch Zusammenschluß von (13), (14), (20), daß die Ungleichung

$$(21) \quad |\square^m a_t| \leq |\square^m g(t)| + |\square^m b_t| < s 2^{ms} \left(\frac{e}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m + \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms},$$

$$|\square^m a_t| < 2 \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms}$$

$$(t = n, n+1, n+2, \dots, 3n - ms)$$

nur für endlich viele Werte von n falsch sein kann.

Die rechte Seite von (21) nimmt mit wachsendem t ab. Es bleibt daher irgend ein Element, das den letzten $n - ms$ Kolonnen der Determinante (16) oder den letzten $n + 1 - ms$ Kolonnen der Determinante (17) entnommen ist, dem absoluten Betrage nach unter der Schranke

$$2 \left(\frac{1}{R}\right)^n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms}.$$

Nach (5) ist

$$|a_t| < \left(\frac{1}{r}\right)^t.$$

Hier nimmt die rechte Seite mit wachsendem t zu, und daher bleibt irgend ein Element, das den ms ersten Kolonnen von (16) oder von (17) angehört, absolut genommen unter der Schranke

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+ms-1}.$$

Dies alles ist höchstens für endlich viele Werte von n ungültig. In demselben Sinne soll die aus dem eben Gesagten folgende Ungleichung

$$|A_n^{(n)}| < n! \left\{ \left(\frac{1}{r} \right)^{2n+m-1} \right\}^{ms} \left\{ 2 \left(\frac{1}{R} \right)^n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{ms} \right\}^{n-ms}$$

verstanden werden. Umsomehr ist

$$|A_n^{(n)}|^{\frac{1}{n^3}} < n^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{n}} \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{\frac{ms}{n} \frac{n-ms}{n}}}{r^{\frac{ms}{n} \frac{n-ms}{n}} R^{\frac{n-ms}{n}}}$$

also

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(n)}|^{\frac{1}{n^3}} \leq \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{\alpha(1-\alpha)}}{r^{(2+\alpha)\alpha} R^{1-\alpha}}.$$

Letzteres findet also für jeden positiven echten Bruch α statt. Daher ist

$$(22) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(n)}|^{\frac{1}{n^3}} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{\alpha(1-\alpha)}}{r^{(2+\alpha)\alpha} R^{1-\alpha}} = \frac{1}{R} < 1.$$

Durch die nämlichen Überlegungen wird auch

$$(23) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n^{(n+1)}|^{\frac{1}{n^3}} \leq \frac{1}{R} < 1$$

geschlossen.

Die Zahlen $A_n^{(n)}, A_n^{(n+1)}$ sind rationale ganze Zahlen, und die einzige rationale ganze Zahl, deren absoluter Betrag < 1 ist, ist die Zahl 0. Daher können von den unendlich vielen Determinanten

$$A_0^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_{n-1}^{(n)}, A_n^{(n+1)}, \dots, \\ A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, \dots, A_n^{(n)}, \dots$$

auf Grund von (22), (23), nur endlich viele von 0 verschieden sein.

Aus diesem Resultat folgt der Satz I durch algebraische Überlegungen.

6. Die Kriterien, die entscheiden, ob eine Potenzreihe eine rationale Funktion darstellt oder nicht, werden, wie gesagt, mit Hilfe der rekurrenten Determinanten (15) ausgedrückt.

Hilfssatz I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

eine rationale Funktion darstellt, deren Nenner höchstens vom Grade $r-1$ ist, lautet so: unter den Determinanten

$$A_0^{(r)}, A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \dots, A_n^{(r)}, \dots$$

sind nur endlich viele von Null verschieden.

Daß die besagte Bedingung notwendig ist, ist leicht ersichtlich. Daß sie auch hinreicht, hat Herr Borel a. a. O. gezeigt, und zum Beweise seines eingangs zitierten Satzes verwendet.

Es können verschiedene Kriterien gebildet werden, die auf den Grad des Nenners keine Rücksicht nehmen. Das für meinen Zweck geeignete Kriterium wird ausgedrückt durch den

Hilfssatz II. Dafür, daß die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

eine rationale Funktion darstelle, ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend: unter den Determinanten

$$A_0^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_{n-1}^{(n)}, \dots,$$

$$A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, \dots, A_n^{(n)}, \dots$$

gibt es nur endlich viele von Null verschiedene.

Es ist leicht und zum Beweise des Satzes I unnötig zu zeigen, daß die Bedingung des Hilfssatzes II notwendig ist. Daß sie hinreicht, wird so geschlossen: nach Voraussetzung gibt es eine Zahl r , so daß

$$A_{r-1}^{(r)} = A_r^{(r+1)} = \dots = A_{r-1+v}^{(r+v)} = \dots = 0,$$

$$A_r^{(r)} = A_{r+1}^{(r+1)} = \dots = A_{r+v}^{(r+v)} = \dots = 0$$

ist. Ich nehme an, daß die Relation

$$(24) \quad A_{n-1}^{(r)} = A_n^{(r+1)} = \dots = A_{n-1+v}^{(r+v)} = A_{n+v}^{(r+v+1)} = \dots = 0,$$

$$A_n^{(r)} = A_{n+1}^{(r+1)} = \dots = A_{n+v}^{(r+v)} = \dots = 0$$

für einen bestimmten Wert $n \geq r$ erfüllt ist. Für $n = r$ ist dies gewiß der Fall. Die bekannte Identität

$$A_{n+v}^{(r+v)} A_{n+v+2}^{(r+v)} - (A_{n+v+1}^{(r+v)})^2 = A_{n+v}^{(r+v+1)} A_{n+v+2}^{(r+v-1)}$$

reduziert sich nach der Annahme (24) auf

$$- (A_{n+1+v}^{(r+v)})^2 = 0 \quad (v = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

womit (24) für $n+1$ anstatt für n , also für unbestimmtes n bewiesen ist. Es ist insbesondere

$$A_{r-1}^{(r)} = A_r^{(r)} = \dots = A_{n-1}^{(r)} = A_n^{(r)} = \dots = 0,$$

womit der Hilfssatz II auf den vorangehenden Hilfssatz des Herrn Borel zurückgeführt ist.

Der Hilfssatz II ist das letzte Glied in der Schlußkette, durch welche wir den Satz I begründet haben.

7. Es ist leicht aus dem Satz I einen Satz über Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten abzuleiten. Ich schicke eine Definition voraus. Ich sage von der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, \dots , daß sie der „Eisensteinschen Bedingung“ genügt, wenn eine natürliche ganze Zahl $m(m \geq 1)$ existiert, so daß sämtliche Zahlen $a_1m, a_2m^2, a_3m^3, \dots$ d. h. sämtliche Koeffizienten der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(mx) - a_0 = a_1mx + a_2m^2x^2 + \dots$$

ganze Zahlen sind. Es besteht nun der

Satz II. *Die singulären Punkte der eindeutigen Funktion $f(x)$ sollen keinen im Endlichen liegenden Häufungspunkt haben, und die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

sollen rationale Zahlen sein.

Die Funktion $f(x)$ ist rational, wenn ihre Potenzreihe der Eisensteinschen Bedingung genügt, und sie ist transzendent, wenn ihre Potenzreihe der Eisensteinschen Bedingung nicht genügt.

Mit anderen Worten, die Eisensteinsche Bedingung liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß eine Funktion $f(x)$ der besagten Art rational sei. Daß dieses Kriterium hinreicht, folgt unmittelbar aus unserem Satz I. Daß es notwendig ist, folgt als trivialer Spezialfall aus einem bekannten Eisensteinschen Satze*).

Satz III. *Die Funktion $f(x)$ sei in ihrem ganzen Existenzbereiche eindeutig. Die Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung um den Punkt $x=0$ seien rationale ganze Zahlen (oder allgemeiner, sie seien rational und der Eisensteinschen Bedingung unterworfen). Wenn $f(x)$ nicht rational ist, so hat die Menge ihrer singulären Punkte wenigstens zwei Häufungspunkte.*

Es genügt den Fall zu betrachten, daß die Entwicklung

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

nur ganzzahlige Koeffizienten enthält. Entgegen der Behauptung sei angenommen, daß a die einzige Häufungsstelle der singulären Punkte der

*) Heine, Der Eisensteinsche Satz über Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen, Crelles Journ. Bd. 45, S. 285—382.

transzendenten Funktion $f(x)$ ist. Da die Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ um $x=0$ reell sind, muß die Menge der singulären Punkte von $f(x)$ die reelle Achse zur Symmetrieachse haben, und da a die einzige Häufungsstelle dieser Menge ist, muß a auf der reellen Achse liegen. Es ist übrigens $a \geq 0$, denn $f(x)$ ist, nach Annahme, für $x=0$ regulär. Auch $a = \infty$ ist durch Satz II ausgeschlossen.

Wie auch die rationale ganze Zahl n gewählt sei, die Entwicklung der Funktion

$$(25) \quad f\left(\frac{x}{1+nx}\right) = a_0 + a_1 \frac{x}{1+nx} + a_2 \left(\frac{x}{1+nx}\right)^2 + \dots$$

um den Punkt $x=0$ hat ersichtlicherweise nur ganzzahlige Koeffizienten. Die Funktion (25) ist übrigens eindeutig, und ihre singulären Punkte haben den einzigen Häufungspunkt b , wo

$$\frac{b}{1+nb} = a$$

also

$$b = \frac{a}{1-na} = \frac{1}{\frac{1}{a} - n}.$$

Wählt man

$$n = \left[\frac{1}{a} \right],$$

so wird eventuell $b = \infty$, auf alle Fälle wird $|b| > 1$, und die eindeutige Funktion (25), die nur ganzzahlige Koeffizienten hat, wird im Kreise $|x| \leq 1$ nur endlich viele singuläre Stellen haben. Darum muß, kraft des Satzes I, die Funktion (25) rational sein, in offenbarem Widerspruch zu der Annahme, daß $f(x)$ transzendent ist. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn man die Richtigkeit des Satzes III zugibt.

8. Werfen wir einen Blick auf den Stand der sich aufdrängenden Frage: welche Arten von analytischen Funktionen können durch Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden, und welche nicht?

Durch Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten können dargestellt werden:

1) Rationale oder algebraische Funktionen, z. B.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

2) Eindeutige Funktionen, die über einen Kreis hinaus nicht fortsetzbar sind, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$$

oder auch Funktionen, die eine singuläre Linie von anderer Gestalt besitzen, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_s x^s} \right)^{n!},$$

wo $a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s$ irgend welche rationale ganze Zahlen sind. (Man beachte, daß unter dieser Bedingung die Entwicklung um $x = 0$ wirklich nur ganze Koeffizienten hat.)

3) Unendlich vieldeutige Funktionen ohne singuläre Linie. So hat z. B. die Funktion

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-16x^2u^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 x^{2n}$$

die vier Verzweigungspunkte $x = 0, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \infty$ unendlich hoher Ordnung und sonst keinen singulären Punkt.

Die in den Sätzen I und III erwähnten Funktionenklassen einerseits, und die eben unter 1), 2), 3) aufgezählten Funktionenklassen andererseits erschöpfen noch lange nicht alle Möglichkeiten, und so bleibt der Untersuchung noch ein weites Feld offen*).

Insbesondere wäre es wünschenswert zu entscheiden, ob folgender Satz richtig ist oder falsch:

„Wenn eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten den Konvergenzradius 1 hat, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder ist die dargestellte Funktion rational, oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar**).“

Es sei ausdrücklich bemerkt: ich behaupte den eben ausgesprochenen Satz nicht, auch sein Gegenteil nicht, ich will nur durch seine Formulierung die Aufmerksamkeit auf ein reizvolles Untersuchungsgebiet lenken.

9. Ich will noch eine letzte Anwendung des Satzes I mitteilen, die einen etwas verschiedenen Charakter hat, als die unter Nr. 7 erwähnten. Ich schicke voraus den folgenden, von Herrn Fatou herrührenden arithmetischen

*) In einer gleichzeitig erscheinenden Arbeit, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, Crelles Journal, beweise ich durch arithmetische Schlüsse, daß das Integral einer rationalen Funktion, wenn es transzendent ausfällt, nicht in eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten entwickelt werden kann.

**) Diese Fragestellung ist nahegelegt durch die Arbeit des Herrn Fatou, Sur les séries entières à coefficients entiers, C. R. Bd. 138 (1904, 1. Sem.), S. 342–344.

Hilfssatz III. Die beiden Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ sollen ganze rationale Koeffizienten, keine gemeinsame Wurzel und keinen gemeinsamen ganzzahligen Zahlenfaktor besitzen (außer ± 1). Wenn sämtliche Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ der Reihe

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

ganze Zahlen sind, so ist

$$Q(0) = \pm 1.$$

Herr Fatou hat seinen Satz a. a. O. ohne Beweis ausgesprochen. Ich teile einen von Herrn Hurwitz herrührenden einfachen Beweis mit.

Die Potenzreihe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

mit rationalen ganzen Koeffizienten heißt „*primitiv*“, wenn die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ außer ± 1 keinen allen gemeinsamen Teiler besitzen. Die geläufige klassische Schlußweise liefert den Satz: *Das Produkt zweier primitiven Potenzreihen ist wieder eine primitive Potenzreihe.*

Die (abbrechende) Potenzreihe

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_sx^s$$

ist primitiv. Denn sollte t ($t > 1$) ein Teiler von allen Zahlen b_0, b_1, \dots, b_s sein, so müßte t wegen

$$P(x) = t \left(\frac{b_0}{t} + \frac{b_1}{t}x + \dots + \frac{b_s}{t}x^s \right) (a_0 + a_1x + \dots)$$

in allen Koeffizienten von $P(x)$ aufgehen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Auf Grund der Voraussetzung existieren zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so daß

$$p(x)P(x) + q(x)Q(x) = m,$$

wo m eine rationale ganze Zahl ≥ 1 ist. Die Potenzreihe

$$\begin{aligned} q(x) + p(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \\ &= p(x) \frac{P(x)}{Q(x)} + q(x) \\ &= \frac{m}{Q(x)} \end{aligned}$$

hat ganzzahlige Koeffizienten. Die Potenzreihe

$$m = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_sx^s)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$$

ist nicht primitiv, wenn $m > 1$. Der erste Faktor rechts ist aber sicher primitiv, und daher kann im Falle $m > 1$ der zweite Faktor nicht

primitiv sein. Auf alle Fälle müssen sämtliche Zahlen $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ durch m teilbar sein. Aus

$$1 = (b_0 + b_1 x + \dots + b_s x^s) \left(\frac{c_0}{m} + \frac{c_1}{m} x + \frac{c_2}{m} x^2 + \dots \right)$$

ergibt sich

$$1 = b_0 \frac{c_0}{m};$$

also ist b_0 ein Faktor von 1 w. z. b. w.

Ich beweise nun den

Satz IV. Die ganzen Funktionen $g_1(z), g_2(z), \dots, g_s(z)$ ($g_r(z) \not\equiv 0$) sollen der Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g_r(r e^{i\vartheta})|}{r} \leq 0$$

gleichmäßig für $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ genügen, und die Zahlen c_1, c_2, \dots, c_s sollen alle voneinander und von 0 verschieden sein.

Wenn die ganze Funktion

$$g(z) = g_1(z)c_1^z + g_2(z)c_2^z + \dots + g_s(z)c_s^z$$

für $z = 0, 1, 2, 3, \dots$ ganze rationale Zahlenwerte annimmt, so sind die Funktionen $g_1(z), g_2(z), \dots, g_s(z)$ ganze rationale Funktionen und die Zahlen c_1, c_2, \dots, c_s ganze algebraische Zahlen.

Nach dem schon benutzten Satze des Herrn Wigert ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_r(n) \cdot c_r^n x^n = G_r \left(\frac{1}{c_r x - 1} \right),$$

wo $G_r(z)$ eine ganze Funktion von z ist, und zwar eine rationale oder eine transzendente, je nachdem $g_r(z)$ rational oder transzendent ist.

Die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n = G_1 \left(\frac{1}{c_1 x - 1} \right) + G_2 \left(\frac{1}{c_2 x - 1} \right) + \dots + G_s \left(\frac{1}{c_s x - 1} \right) = f(x)$$

ist eindeutig, sie hat die s singulären Stellen $c_1^{-1}, c_2^{-1}, \dots, c_s^{-1}$, und zwar ist die Stelle c_r^{-1} ein Pol oder eine wesentliche singuläre Stelle der Funktion $f(x)$, je nachdem $G_r(z)$ rational oder transzendent, also je nachdem $g_r(z)$ rational oder transzendent ist.

Die Funktion $f(x)$ ist aber rational, kraft des Satzes I, denn ihre Entwicklungskoeffizienten $g(0), g(1), g(2), \dots$ sind sämtlich ganze Zahlen. Sämtliche singulären Stellen von $f(x)$ sind Pole, und daher sind sämtliche ganze Funktionen $g_r(z)$ Polynome, was zuerst z. b. w.

$f(x)$ ist der Quotient zweier Polynome $P(x)$ und $Q(x)$

$$g(0) + g(1)x + g(2)x^2 + \dots = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Bei Berücksichtigung des Hilfssatzes I findet man leicht, daß die Koeffizienten von $Q(x)$, und folglich auch die von $P(x)$ als rational angenommen werden können. Richtig gekürzt, erfüllen somit die Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ alle Bedingungen des Hilfssatzes III, es ist also

$$Q(0) = \pm 1.$$

Die Pole von $f(x)$, d. h. die Zahlen $c_1^{-1}, c_2^{-1}, \dots, c_s^{-1}$ sind die Wurzeln des Polynoms $Q(x)$, daher sind die Zahlen c_1, c_2, \dots, c_s Wurzeln der Gleichung

$$x^s Q\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

deren höchster Koeffizient ± 1 , und deren übrige Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, was an zweiter Stelle z. b. w.

Für andere Fragestellungen betreffend „ganze ganzwertige Funktionen“ vgl. die zu Beginn zitierte Arbeit des Verfassers.

Zürich, den 13. Oktober 1915.

Zur Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen.

Von

EMIL HILB in Würzburg.

Läßt man in einem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda a_{\lambda x}(x) \quad x=1, 2, \dots, n$$

n unendlich groß werden, so erhält man bei geeignetem Grenzübergang eine lineare Integrodifferentialgleichung

$$(2) \quad \frac{dy(x; x)}{dx} = \int_0^1 y(\lambda; x) a(\lambda, x; x) d\lambda,$$

wobei wir annehmen wollen, daß $a(\lambda, x; x)$ innerhalb eines gegebenen Gebietes in der komplexen x -Ebene für alle reellen Werte von λ und x , für welche $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ ist, eine monogene Funktion von x sei.

Es entsteht nun die Aufgabe, eine Theorie für die Gleichung (2) zu entwickeln, die den für die Systeme (1) vorhandenen mannigfachen funktionentheoretischen Untersuchungen analog ist, eine Aufgabe, die Herr Schlesinger*) sich gestellt und in erfolgreicher Weise in Angriff genommen hat, wobei er sich neben anderen Hilfsmitteln einer wiederholten Durchführung des Grenzübergangs bedient. Es erscheint mir aber von Interesse, die Integrodifferentialgleichung (2) einer direkten Behandlung zu unterziehen, was im folgenden geschehen soll.

*) Schlesinger, Sur les équations intégrô-différentielles C. R. (1914) 158, S. 1872 f. und Zur Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen, Deutsche Math. Ver. 24 (1915), S. 84f. Abgesehen von gewissen, durch formale Rechnung ableitbaren Sätzen, welche in § 3 zusammengestellt sind, wird die Kenntnis dieser Arbeiten hier nicht vorausgesetzt.

§ 1.

Grundlagen der Theorie.

Es habe in einem gewissen einfach oder mehrfach zusammenhängenden Bereich der komplexen x -Ebene $|a(\lambda, \kappa; x)|$ die Eigenschaft, für alle in Betracht kommenden Werte von x , λ und κ unterhalb einer festen Grenze M zu bleiben. Wir wenden auf (2) in bekannter Weise die Methode der sukzessiven Approximationen an und erhalten für $y(\kappa; x)$ eine in bezug auf κ und x gleichmäßig konvergente Reihe, welche für $y(\kappa; x)$ die Darstellung

$$(3) \quad y(\kappa; x) = c(x) + \int_0^1 c(\lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

liefert, wobei, wenn α innerhalb des angegebenen Bereiches in der komplexen x -Ebene liegt,

$$(4) \quad y(\lambda, \kappa; x) = \int_{\alpha}^x a(\lambda, \kappa; x) dx + \int_{\alpha}^x dx \int_0^1 \int_{\alpha}^x a(\lambda, \lambda_1; x) dx a(\lambda_1, \kappa; x) d\lambda_1 + \dots$$

ist und also der Integrodifferentialgleichung

$$(5) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = a(i, \kappa; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

genügt.

Die Gleichung (2) nennt Schlesinger die *Streckengleichung*, (5) die *Feldgleichung*. Die Einführung von $y(\lambda, \kappa; x)$ zur Darstellung von $y(\kappa; x)$ entspricht genau der Einführung der lösenden Funktionen in der Theorie der Integralgleichungen, nämlich, in der Sprache der bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen*) ausgedrückt, der Abtrennung des Einheitskernes von der allgemeinen Lösung.

Für $x = \alpha$ nimmt $y(\kappa; x)$ den Wert $c(\kappa)$ an, während $y(\lambda, \kappa; \alpha)$ verschwindet. Eine Lösung von (5), welche für $x = \alpha$ den vorgegebenen Wert $c(i, \kappa)$ annimmt, ergibt sich ebenfalls vermittelt sukzessiver Approximationen in der Form

$$(6) \quad Y(i, \kappa; x) = c(i, \kappa) + y(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda.$$

Wir nennen $Y(i, \kappa; x)$ eine *allgemeine* Lösung von (5), wenn die mit $c(i, \kappa)$ als Kern gebildete Integralgleichung

$$(7) \quad c(x) = C(x) + \int_0^1 C(\lambda) c(\lambda, \kappa) d\lambda$$

*) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 5. Mitt., Gött. Nachr. 1906, S. 439f.

für beliebiges $c(x)$ lösbar ist, d. h. wenn die zu $c(\lambda, x)$ zugehörige *Fredholmsche Determinante* von Null verschieden ist. Es folgt durch Einsetzen von $c(x)$ aus (7) in (3) unter Berücksichtigung von (6)

$$(8) \quad y(x; x) = C(x) + \int_0^1 C(\lambda) Y(\lambda, x; x) d\lambda.$$

Nun genügt auch $Y(i, x; x) - y(i, x; x)$ der Integrodifferentialgleichung (2) und nimmt für $x = \alpha$ den Wert $c(i, x)$ an; also ist nach (8)

$$Y(i, x; x) - y(i, x; x) = -C(i, x) - \int_0^1 C(i, \lambda) Y(\lambda, x; x) d\lambda$$

oder

$$(9) \quad y(i, x; x) = C(i, x) + Y(i, x; x) + \int_0^1 C(i, \lambda) Y(\lambda, x; x) d\lambda,$$

wobei entsprechend (7)

$$(10) \quad c(i, x) = -C(i, x) - \int_0^1 C(i, \lambda) c(\lambda, x) d\lambda$$

ist.

Nun ist nach einem bekannten Satze von Fredholm*), wenn

$$(11) \quad Y(i, x) = c(i, x) + y(i, x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, x) d\lambda$$

ist, die Fredholmsche Determinante von $Y(i, x)$ gleich dem Produkte der Fredholmschen Determinanten von $c(i, x)$ und $y(i, x)$.

Es verschwindet aber $y(i, x; x)$ für $x = \alpha$, also hat die zu $y(i, x; \alpha)$ gehörige Fredholmsche Determinante den Wert 1 und man kann daher um α eine endliche Umgebung in der komplexen x Ebene angeben, für welche die Fredholmsche Determinante von $y(i, x; x)$, die nur von x allein abhängt, gewiß von Null verschieden ist. Dasselbe gilt aber nach (6) entsprechend dem eben erwähnten Satze für die Fredholmsche Determinante einer jeden *allgemeinen* Lösung der Feldgleichung und überhaupt für jede Lösung der Feldgleichung, die in irgend einem Punkte der eben betrachteten Umgebung von α einen Wert $\gamma(i, k)$ annimmt, dessen Fredholmsche Determinante von Null verschieden ist. Da man nun jeden Punkt des zugrunde gelegten Bereiches als α wählen kann, so folgt in

*) Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math. 27 (1903), S. 383.

bekannter Weise, daß die Fredholmsche Determinante einer *allgemeinen* Lösung in dem ganzen Bereiche nirgends verschwindet.*)

Läßt man nun in einem mehrfach zusammenhängenden Bereich der x -Ebene, innerhalb dessen $a(\lambda, \kappa; x)$ die am Anfang dieses Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften hat, x einen geschlossenen Umlauf machen, so wird $y(i, \kappa; x)$ im allgemeinen in eine andere Lösung $\bar{y}(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung übergehen, so daß

$$(12) \quad \bar{y}(i, \kappa; x) = c(i, \kappa) + y(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

ist. Wir bezeichnen nun nach Schlesinger

$$c(i, \kappa) + y(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) y(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

als Operation aufgefaßt mit

$$\{c(i, \kappa)\} \{y(i, \kappa; x)\},$$

wobei dann dieselben Regeln gelten, wie bei der Komposition von Bilinearformen**).

Die Formel (12) gilt speziell bei einem Umlauf um irgend einen isolierten singulären Punkt, etwa $x = 0$, in dessen Umgebung $|a(i, \kappa; x)|$ mit einer geeigneten Potenz von $|x|$ multipliziert unterhalb einer festen endlichen Grenze bleibt; diesen Fall werden wir im folgenden ausschließlich betrachten.

Es sei nun $\eta(i, \kappa; x)$ eine andere, in der Umgebung von 0 (dieses aber ausgeschlossen) reguläre Funktion von x , deren Fredholmsche Determinante für alle in Betracht kommenden Werte von x nicht verschwindet und welche bei dem obigen Umlauf in $\bar{\eta}(i, \kappa; x)$ übergeht, so daß

$$(13) \quad \{\bar{\eta}(i, \kappa; x)\} = \{c(i, \kappa) + \eta(i, \kappa; x) + \int_0^1 c(i, \lambda) \eta(\lambda, \kappa; x) d\lambda\} \\ = \{c(i, \kappa)\} \{\eta(i, \kappa; x)\}$$

ist; dann nennt Schlesinger $y(i, \kappa; x)$ und $\eta(i, \kappa; x)$ kogredient für die Umgebung von $x = 0$.

*) Schlesinger zeigt l. c. S. 96 durch Grenzübergang, daß die Fredholmsche

$$\int_0^1 dx \int_0^1 a(i, \lambda; x) d\lambda$$

Determinante von $y(i, \kappa; x)$ den Wert e^{α} hat; Sassmanshausen, ein Schüler von Schlesinger, beweist (Deutsche Math. Ver. 25 (1916)) die Formel direkt aus der Darstellung der Fredholmschen Determinante.

**) Ist $E(i, \kappa)$ die Einheitsform, so entspricht als Bilinearform aufgefaßt

$$\{c(i, \kappa)\} \{y(i, \kappa; x)\} \text{ formal } (E(i, \kappa) + c(i, \kappa))(E(i, \kappa) + y(i, \kappa; x)) - E(i, \kappa).$$

Da die Fredholmsche Determinante von $c(i, \kappa)$ von Null verschieden ist, existiert $c^{-1}(i, \kappa)$, so daß $\{c(i, \kappa)\} \{c^{-1}(i, \kappa)\} = 0$ ist.

Ist dann*)

$$(14) \quad \{\eta(i, x; x)\} \{\eta^{-1}(i, x; x)\} = 0,$$

so ist

$$\{\bar{\eta}^{-1}(i, x; x)\} = [\{c(i, x)\} \{\eta(i, x; x)\}]^{-1} = \{\eta^{-1}(i, x; x)\} \{c^{-1}(i, x)\},$$

also ist

$$(15) \quad \{\bar{\eta}^{-1}(i, x; x)\} \{\bar{y}(i, x; x)\} = \{\eta^{-1}(i, x; x)\} \{c^{-1}(i, x)\} \{c(i, x)\} \{y(i, x; x)\} \\ = \{\eta^{-1}(i, x; x)\} \{y(i, x; x)\} = f(i, x; x)$$

eine in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Funktion und

$$(16) \quad \{y(i, x; x)\} = \{\eta(i, x; x)\} \{f(i, x; x)\}; \\ \{\eta(i, x; x)\} = \{y(i, x; x)\} \{f^{-1}(i, x; x)\}.$$

§ 2.

Die Cauchy-Volterrasse Integralsdifferentialgleichung.

Der einfachste Typus einer Feldgleichung ist

$$(17) \quad \frac{dy(i, x; t)}{dt} = a(i, x) + \int_0^1 y(i, \lambda; t) a(\lambda, x) d\lambda,$$

in der $a(i, x)$ von t unabhängig ist. Setzt man dann in üblicher Weise

$$\int_0^1 a^{(v)}(i, \lambda) a(\lambda, x) d\lambda = a^{(v+1)}(i, x) \quad v = 1, 2, \dots,$$

so folgt aus der Methode der sukzessiven Approximationen

$$(18) \quad y(i, x; t) = \sum_{v=1}^{\infty} t^v \frac{a^{(v)}(i, x)}{v!} = W(a(i, x); t);$$

$W(a(i, x); t)$ nennen wir nach dem Vorgang von Schlesinger**) die Volterrasse Transzendente.

$W(a(i, x); t + u)$ genügt ebenfalls (17); aus (6) folgt dann sofort das Additionstheorem

$$(19) \quad W(a(i, x); t + u) \\ = W(a(i, x); t) + W(a(i, x); u) + \int_0^1 W(a(i, \lambda); t) W(a(\lambda, x); u) d\lambda.$$

Setzt man

$$t = \lg x,$$

*) I. c. S. 108.

**) I. c. S. 113.

so erhält man

$$(20) \quad \frac{dy(i, x; x)}{dx} = \frac{a(i, x)}{x} + \int_0^1 y(i, \lambda; x) \frac{a(\lambda, x)}{x} d\lambda;$$

diese Gleichung bezeichnen wir als *Cauchy-Volterrasche* Feldgleichung.

Es besteht dann nach Schlesinger^{*)} der Satz:

Zu einer Feldgleichung gibt es in der Umgebung einer ihrer isolierten singulären Stellen stets eine zu ihr kogrediente Cauchy-Volterrasche Feldgleichung.

Sei 0 diese singuläre Stelle, dann kommt also der Beweis dieses Satzes darauf hinaus, zu zeigen, daß man zu jedem $c(i, x)$, dessen Fredholm'sche Determinante von Null verschieden ist, $a(i, x)$ so bestimmen kann, daß

$$(21) \quad W(a(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) = c(i, x),$$

da bei einem Umlauf um $x = 0$, der von 1 ausgeht, t von 0 in $2\pi\sqrt{-1}$ übergeht.

Ist $|c(i, x)| < 1$, so konvergiert die dem Logarithmus nachgebildete Reihe^{**)}

$$(22) \quad c(i, x) - \frac{c^{(1)}(i, x)}{2} + \frac{c^{(2)}(i, x)}{3} - \dots$$

Setzt man dann für $2\pi\sqrt{-1} a(i, x)$ diese Reihe ein, so ist (21) erfüllt, da der Bau der Reihe für $W(a(i, x); t)$ formal mit dem der Reihe für $e^{ta(i, x)} - 1$ übereinstimmt und alle in Betracht kommenden formalen Rechnungsregeln für beide Reihen gleicherweise gelten.

Ist $|c(i, x)|$ nicht durchaus < 1 , so kann man, wie Schlesinger andeutet, den Nachweis durch Grenzübergang aus der analogen Tatsache in der Theorie der Matrizen oder durch analytische Fortsetzung vermittels des Additionstheorems (19) erbringen. Wir wollen jedoch einen anderen Beweisgang einschlagen, der uns gleichzeitig für die späteren Entwicklungen Material bringen wird. Der Beweis besteht darin, daß wir $c(i, x)$ in zwei Summanden zerlegen, die zueinander *orthogonal* sind, derart daß auch $2\pi\sqrt{-1} a(i, x)$ in zwei zueinander orthogonale Summanden zerfällt, von denen der eine durch eine zu (22) analoge Reihe, der andere in endlicher Form darstellbar ist.

Zu diesem Zwecke setzen wir also

$$(23) \quad c(i, x) = c_1(i, x) + c_2(i, x),$$

wobei $c_1(i, x)$ der Bestandteil von $c(i, x)$ ist, dessen notwendigerweise nur in endlicher Anzahl vorhandenen Eigenwerte absolut genommen kleiner

^{*)} l. c. Abschnitt V.

^{**) Schlesinger, l. c. S. 115.}

sind als zwei, während alle Eigenwerte von $c_2(i, x)$ absolut genommen größer sind als zwei*). Es ist:

$$(24) \quad \int_0^1 c_1(i, \lambda) c_2(\lambda, x) d\lambda = \int_0^1 c_2(i, \lambda) c_1(\lambda, x) d\lambda = 0.$$

Ist dann

$$\gamma(i, x) = c_2(i, x) + \mu \int_0^1 \gamma(i, \lambda) c_2(\lambda, x) d\lambda,$$

so konvergiert die Reihe

$$(25) \quad \gamma(i, x) = c_2(i, x) + \mu c_2^{(2)}(i, x) + \mu^2 c_2^{(3)}(i, x) + \dots$$

absolut und gleichmäßig in i und x , wenn $|\mu| < 2$ ist. In der Tat läßt sich nach den Fredholmschen Formeln $\gamma(i, x)$ als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von μ darstellen; der Nenner ist von i und x unabhängig, seine Nullstellen sind absolut genommen größer als zwei, so daß der absolute Betrag des reziproken Wertes des Nenners für $|\mu| < 2$ unterhalb einer von i und x unabhängigen Grenze bleibt; dasselbe folgt für den Zähler unmittelbar aus dem beim Beweis der Fredholmschen Formeln benützten Hadamardschen Determinantensatz. Daraus folgt unmittelbar die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (25) und um so mehr gilt diese für die Reihe

$$(26) \quad 2\pi \sqrt{-1} a_2(i, x) = c_2(i, x) - \frac{c_2^{(2)}(i, x)}{2} + \frac{c_2^{(3)}(i, x)}{3} \dots$$

Hingegen zerlegen wir $c_1(i, x)$ entsprechend seinen Eigenwerten und den zu diesen Eigenwerten gehörigen kanonischen Untergruppen**) in eine Summe von zueinander orthogonalen Summanden, setzen also

$$c_1(i, x) = C_1(i, x) + C_2(i, x) + \dots,$$

wobei, wenn wir $C_1(i, x)$ als typischen Repräsentanten herausgreifen,***)

*) Goursat, Recherches sur les équations intégrales, Ann. de Toulouse 22 (1908), S. 64; vgl. auch Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen, Deutsche Math. Ver. 1911, S. 25.

**) Goursat, l. c. S. 63, théorème VIII.

***) Diese Darstellung geht aus der von Goursat S. 63, 1. Zeile gegebenen hervor, indem man wie l. c. S. 67

$$\Phi_1 = \varphi_1, \Phi_2 = \varphi_2, \dots, \Phi_r = \varphi_r,$$

und

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \psi_1, \Psi_2 + \Psi_3 = \psi_2, \dots, \Psi_{r-1} + \Psi_r = \psi_{r-1}, \Psi_r = \psi_r,$$

setzt. Im Texte ist dann statt Φ wieder $\frac{\Phi}{\mu_1}$, statt Ψ wieder ψ geschrieben.

$$(27) \quad \mu_1 C_1(i, x) = \varphi_1(i)(\psi_1(x) + \psi_2(x)) + \varphi_2(i)(\psi_2(x) + \psi_3(x)) + \dots \\ \dots + \varphi_{r-1}(i)(\psi_{r-1}(x) + \psi_r(x)) + \varphi_r(i)\psi_r(x)$$

und

$$(28) \quad \int_0^1 \varphi_r(i) \psi_r(i) di = 0, \quad \text{wenn } r \neq s, \\ = 1, \quad \text{wenn } r = s$$

ist. Ferner ist $|\mu_1| \leq 2$, speziell aber muß μ_1 von -1 verschieden sein, da wir annehmen, daß die Fredholmsche Determinante von $c(i, x)$ von 0 verschieden ist.

Sei zunächst $\nu = 1$, so wollen wir zeigen, daß man $A_1(i, x)$ so bestimmen kann, daß

$$(29) \quad W(A_1(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) = \frac{\varphi_1(i)\psi_1(x)}{\mu_1}$$

wird. Wir setzen versuchsweise

$$(30) \quad A_1(i, x) = \frac{\varphi_1(i)\psi_1(x)}{\varrho},$$

dann folgt aus (29)

$$(31) \quad \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} = 1 + \frac{1}{\mu_1};$$

diese Gleichung für ϱ ist immer auflösbar, da für μ_1 die Werte 0 und -1 ausgeschlossen sind.

Im allgemeinen Fall setzen wir entsprechend

$$(32) \quad A_1(i, x) = \frac{\bar{\varphi}_1(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_1(x) + \bar{\psi}_2(x)] + \frac{\bar{\varphi}_2(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_2(x) + \bar{\psi}_3(x)] + \dots + \frac{\bar{\varphi}_r(i)}{\varrho} \bar{\psi}_r(x),$$

wobei für die Funktionen $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ die Relationen (28) gelten mögen. Dann wird

$$(33) \quad W(A_1(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) \\ = \bar{\varphi}_1(i) \left[\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_1(x) + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} \frac{e^{\frac{\varrho}{1!}}}{1!} \bar{\psi}_2(x) + \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} \right)^2 \frac{e^{\frac{\varrho}{2!}}}{2!} \bar{\psi}_3(x) + \dots \right] \\ + \bar{\varphi}_2(i) \left[\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_2(x) + \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho} \frac{e^{\frac{\varrho}{1!}}}{1!} \bar{\psi}_3(x) + \dots \right] \\ + \dots$$

Bestimmt man ϱ aus (31), dann kann man von den Funktionen $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ durch eine doppelte lineare Substitution*) zu den φ, ψ so übergehen, daß

*) Vgl. auch Lalesco, l'étude des noyaux résolvants, Bulletin de la Soc. math. 39 (1911), S. 86 u. 96.

die rechte Seite von (33) in $C_1(i, x)$ übergeht und für die Funktionen φ und ψ einerseits, $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ andererseits die Orthogonalitätsrelationen (28) gelten.

Nun sind die Funktionen $A_1(i, x)$, $A_2(i, x)$ usf., wie aus (32), (33) und (26) hervorgeht, untereinander und zu $a_2(i, x)$ orthogonal, also folgt aus der Definitionsgleichung (18)

$$(34) \quad W((A_1(i, x) + A_2(i, x) + \dots + A_n(i, x) + a_2(i, x)); 2\pi\sqrt{-1}) \\ = W(A_1(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) + W(A_2(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) + \dots + W(A_n(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) \\ + W(a_2(i, x); 2\pi\sqrt{-1}) = C_1(i, x) + C_2(i, x) + \dots + C_n(i, x) + c_2(i, x) = c(i, x).$$

Es ist damit also tatsächlich gezeigt, daß man bei vorgegebenem $c(i, x)$ stets ein $a(i, x)$ so bestimmen kann, daß (21) erfüllt ist; es entsteht nun die Aufgabe, alle überhaupt möglichen $a(i, x)$ zu bestimmen, mit anderen Worten, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür anzugeben, daß zwei Cauchy-Volterrasche Feldgleichungen kogredient sind. Es sollen jedoch dieser Untersuchung im nächsten Paragraphen einige formal abzuleitende Sätze von Schlesinger, die wir späterhin brauchen werden, vorangestellt werden.

§ 3.

Zusammenstellung von Hilfsformeln.

Ist $y^{-1}(i, x; x)$ das inverse Feld zu $y(i, x; x)$, also

$$(35) \quad \{y(i, x; x)\} \{y^{-1}(i, x; x)\} = 0,$$

so erhält man durch Auflösung der Integralgleichung (5), in welcher $y(i, \lambda; x)$ als Kern aufgefaßt ist,

$$(36) \quad a(i, x; x) = \frac{dy(i, x; x)}{dx} + \int_0^1 y^{-1}(i, \lambda; x) \frac{dy(\lambda, x; x)}{dx} d\lambda.$$

Ist dann

$$(37) \quad \eta(i, x; x) = \{y(i, x; x)\} \{g(i, x; x)\},$$

so genügt $\eta(i, x; x)$, wie aus (36) und (37) durch Umrechnung folgt*), der Feldgleichung

$$(38) \quad \frac{d\eta(i, x; x)}{dx} = a(i, x; x) + \int_0^1 \eta(i, \lambda; x) a(\lambda, x; x) d\lambda,$$

wenn

*) Schlesinger, l. c. S. 110.

$$\begin{aligned}
 (39) \quad a(i, \kappa; x) = & a(i, \kappa; x) + \int_0^1 a(i, \lambda; x) g(\lambda, \kappa; x) d\lambda \\
 & + \int_0^1 g^{-1}(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 g^{-1}(i, \lambda; x) a(\lambda, \nu; x) g(\nu, \kappa; x) d\lambda d\nu + \frac{dg(i, \kappa; x)}{dx} \\
 & + \int_0^1 g^{-1}(i, \lambda; x) \frac{dg(\lambda, \kappa; x)}{dx} d\lambda
 \end{aligned}$$

ist. Ferner erwähnen wir noch die folgenden zwei Sätze von Schlesinger:

a) Genügt $y(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung*)

$$(5) \quad \frac{dy(i, \kappa; x)}{dx} = a(i, \kappa; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) a(\lambda, \kappa; x) d\lambda$$

und ist $y^{-1}(i, \kappa; x)$ das inverse Feld zu $y(i, \kappa; x)$, so genügt $y^{-1}(i, \kappa; x)$ der Feldgleichung

$$(40) \quad \frac{dy^{-1}(i, \kappa; x)}{dx} = -a(i, \kappa; x) - \int_0^1 y^{-1}(\lambda, \kappa; x) a(i, \lambda; x) d\lambda.$$

b) Die allgemeine Lösung**) der inhomogenen Cauchy-Volterraschen Streckengleichung

$$(41) \quad \frac{dy(\kappa; x)}{dx} = \int_0^1 y(\lambda; x) \frac{a(\lambda, \kappa)}{x} d\lambda + f(\kappa; x)$$

läßt sich in der Form darstellen

$$(42) \quad y(\kappa; x) = \int_{x_0}^x d\xi \left[f(\kappa; \xi) + \int_0^1 d\lambda f(\lambda; \xi) W(a(\lambda, \kappa); \lg \frac{x}{\xi}) \right].$$

§ 4.

Kogrediente Cauchy-Volterrasche Integrodifferentialgleichungen.

Es handelt sich nach den Ausführungen der § 1 und 2 um die Aufgabe, zu gegebenem stetigen $a(i, \kappa)$ alle stetigen Funktionen $b(i, \kappa)$ und alle in der Umgebung von $x=0$ eindeutigen Funktionen $f(i, \kappa; x)$ zu bestimmen, so daß gemäß (16)

$$(43) \quad W(a(i, \kappa; \lg x) = \{ W(b(i, \kappa; \lg x) \} \{ f(i, \kappa; x) \}$$

wird. Diese Frage hängt auf das engste mit den Eigenwerten der Funk-

*) l. c. S. 118.

**) l. c. S. 122.

tion $a(i, x)$ und der in (21) definierten Funktion $c(i, x)$ zusammen. Es sei nämlich $y(x; x)$ eine Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$(44) \quad \frac{dy(x; x)}{dx} = \int_0^1 y(\lambda; x) \frac{a(\lambda, x)}{x} d\lambda,$$

so daß entsprechend (3) $y(x; x)$ sich in der Form

$$(45) \quad y(x; x) = C(x) + \int_0^1 C(\lambda) W(a(\lambda, x); \lg x) d\lambda$$

darstellen läßt. $W(a(\lambda, x); \lg x)$ verschwindet nach (18) für $x=1$; ferner ist

$$(46) \quad y(x, 1) = C(x).$$

Also wird nach einem Umlauf von x um 0 entsprechend (21)

$$(47) \quad \bar{y}(x, 1) = C(x) + \int_0^1 C(\lambda) c(\lambda, x) d\lambda$$

und speziell wird

$$(48) \quad \bar{y}(x, 1) = \omega y(x, 1),$$

wobei ω von x unabhängig ist, wenn

$$(49) \quad C(x) = \frac{1}{\omega - 1} \int_0^1 C(\lambda) c(\lambda, x) d\lambda$$

ist, wenn also $\frac{1}{\omega - 1}$ ein Eigenwert μ_1 von $c(\lambda, x)$ ist.

Nun folgt aus der Darstellung (18) von $W(a(\lambda, x); \lg x)$, wie weiter unten noch näher ausgeführt werden soll, daß $W(a(\lambda, x); \lg x)$ mit einer endlichen Potenz von x multipliziert an der Stelle $x=0$ endlich bleibt. Setzt man daher, wenn (49) erfüllt ist,

$$(50) \quad e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\varrho}} = \omega = 1 + \frac{1}{\mu_1},$$

so erhält man durch formalen Ansatz von $y(x; x)$ in der Form $x^\varrho \mathfrak{P}(x; x)$, wo $\mathfrak{P}(x; x)$ eine Potenzreihe in bezug auf x ist,

$$(51) \quad y(x; x) = x^{\frac{1}{\varrho}} \varphi(x).$$

Dabei ist

$$(52) \quad \varphi(x) = \varrho \int_0^1 \varphi(\lambda) a(\lambda, x) d\lambda.$$

Die Eigenwerte ϱ von $a(\lambda, x)$ und die Eigenwerte μ von $c(\lambda, x)$ sind also durch (50) verknüpft; die reziproken Eigenwerte von $a(i, x)$ und $b(i, x)$ dürfen sich daher entsprechend der in § 1 gegebenen Definition der Kogredienz nur um ganze Zahlen unterscheiden. Um diese ganzen

Zahlen festzulegen, wollen wir zeigen, daß man stets zu einer kogredienten Feldgleichung übergehen kann, bei welcher ein einziger reziproker Eigenwert um 1 vermehrt bzw. vermindert ist.

Es sei $a(i, x)$ in die zwei orthogonalen Summanden $a_1(i, x)$ und $a_2(i, x)$ zerlegt, wobei analog zu (32)

$$(53) \quad a_1(i, x) = \frac{\bar{\varphi}_1(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_1(x) + \bar{\psi}_2(x)] + \frac{\bar{\varphi}_2(i)}{\varrho} [\bar{\psi}_2(x) + \bar{\psi}_3(x)] + \dots + \frac{\bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(x)}{\varrho}.$$

Wir setzen

$$(54) \quad g(i, x; x) = (x-1) (\bar{\varphi}_1(i) \bar{\psi}_1(x) + \bar{\varphi}_2(i) \bar{\psi}_2(x) + \dots + \bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(x)),$$

also hat man

$$(55) \quad g^{-1}(i, x; x) = \frac{1-x}{x} (\bar{\varphi}_1(i) \bar{\psi}_1(x) + \bar{\varphi}_2(i) \bar{\psi}_2(x) + \dots + \bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(x)).$$

Ist dann

$$(56) \quad W(a(i, x); \lg x) = \{ W(a(i, x); \lg x) \} \{ g(i, x; x) \},$$

so folgt aus (39) durch eine leichte Rechnung

$$(57) \quad \begin{aligned} a(i, x) = & \bar{\varphi}_1(i) \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_1(x) + \frac{1}{\varrho + 1} \bar{\psi}_2(x) \right] \\ & + \bar{\varphi}_2(i) \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_2(x) + \frac{1}{\varrho + 1} \bar{\psi}_3(x) \right] + \dots \\ & \dots + \bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(x) \left(\frac{1}{\varrho} + 1 \right) + a_2(i, x). \end{aligned}$$

Es ist also*) in dem $a_1(i, x)$ entsprechenden Summanden tatsächlich $\frac{1}{\varrho}$ durch $\frac{1}{\varrho} + 1$ ersetzt. Besitzt $a_2(i, x)$ noch ϱ als Eigenwert, so sind noch weitere Summanden abzuspalten und genau wie $a_1(i, x)$ zu behandeln. Nimmt man statt $g(i, x; x)$ die Funktion $g^{-1}(i, x; x)$, so wird der reziproke Eigenwert um 1 erniedrigt. Nun haben die Eigenwerte von $a(i, x)$ als einzige Häufungsstelle ∞ , es gibt also nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten, für welche der absolute Betrag der reellen Teile ihrer reziproken Werte größer ist als $\frac{1}{2}$.

Durch eine endliche Anzahl von Transformationen der beiden angegebenen Arten kann man also stets erreichen, daß die reziproken Werte aller Eigenwerte von $a(i, x)$ reelle Teile besitzen, die zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegen. Ist diese Bedingung für alle Eigenwerte von $a(i, x)$ erfüllt, dann behaupten wir, daß $W(a(i, x); \lg x)$ an der Stelle $x=0$ schwächer unendlich wird, als $x^{-\frac{1}{2}}$, wenn wir die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ zunächst

*) Die Darstellung (57) läßt sich durch eine auf die $\bar{\varphi}_r(i)$ und $\bar{\psi}_r(x)$ auszuübende doppelt lineare Substitution wieder orthogonal in die alte Normalform überführen.

ausschließen. Den Beweis führen wir analog wie in § 2 bei $c(i, x)$, d. h. wir setzen

$$(58) \quad a(i, x) = a_1(i, x) + a_2(i, x),$$

wobei $a_1(i, x)$ und $a_2(i, x)$ zueinander orthogonal und alle Eigenwerte von $a_1(i, x)$ dem absoluten Betrage nach ≤ 4 sind, während die absoluten Beträge der Eigenwerte von $a_2(i, x)$ größer sind als 4. Dann ist nach (18)

$$(59) \quad W(a(i, x); \lg x) = W(a_1(i, x); \lg x) + W(a_2(i, x); \lg x).$$

Wie man sich durch dieselbe Rechnung, die zu (33) führte, leicht überzeugt, besteht $W(a_1(i, x); \lg x)$ aus einer endlichen Anzahl von Summanden der Form

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_1(i) \left[\left(x^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_1(x) + x^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg x}{\varrho} \frac{\bar{\psi}_2(x)}{1!} + x^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{\lg x}{\varrho} \right)^2 \frac{\bar{\psi}_3(x)}{2!} + \dots \right] \\ & + \bar{\varphi}_2(i) \left[\left(x^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_2(x) + x^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg x}{\varrho} \frac{\bar{\psi}_3(x)}{1!} + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

Da*)

$$(60) \quad -\frac{1}{2} < \Re \left(\frac{1}{\varrho} \right) < \frac{1}{2},$$

so wird $W(a_1(i, x); \lg x)$ für $x = 0$ und für $x = \infty$ schwächer unendlich, als $x^{-\frac{1}{2}}$ bzw. als $x^{\frac{1}{2}}$.

Ist ferner

$$(61) \quad a_2(i, x) = a_2(i, x) + \mu \int_0^1 a_2(i, \lambda) a_2(\lambda, x) d\lambda,$$

so konvergiert die Reihe

$$(62) \quad a_2(i, x) = a_2(i, x) + \mu a_2^{(2)}(i, x) + \dots$$

absolut und gleichmäßig in i und x , wenn $\mu \leq 4$. Durch analoge Schlüsse, wie wir sie anschließend an (25) gemacht haben, folgt

$$(63) \quad |a_2^{(v)}(i, x)| < \frac{M}{4^v},$$

also ist

$$\begin{aligned} |W(a_2(i, x); \lg x)| & < M e^{\frac{|\lg x|}{4}} = M |x|^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{wenn } |x| < 1, \\ & = M |x|^{\frac{1}{4}}, \quad \text{wenn } |x| > 1. \end{aligned}$$

Unsere Behauptung ist damit vollständig bewiesen und gleichzeitig ist gezeigt, daß, auch wenn (60) nicht erfüllt ist, $W(a(i, x); \lg x)$ in der Umgebung von $x = 0$ bzw. ∞ nicht stärker unendlich wird, als eine geeignete Potenz von $\frac{1}{x}$ bzw. x .

*) \Re bedeutet: reeller Teil.

Wir denken uns jetzt in (43) $a(i, x)$ und $b(i, x)$ durch eine vorhergegangene Transformation der angegebenen Art so umgestaltet, daß für alle Eigenwerte (60) erfüllt ist. Da nun $b(x, i)$ dieselben Eigenwerte hat wie $b(i, x)$ und die Eigenwerte von $-b(i, x)$ sich von denen von $+b(i, x)$ nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so folgt aus (40), daß auch $W^{-1}(b(i, x); \lg x)$ an der Stelle $x = 0$ bzw. ∞ schwächer unendlich wird, als $x^{-\frac{1}{2}}$ bzw. $x^{\frac{1}{2}}$.

Es folgt also aus (43)

$$(64) \quad f(i, x; x) = \{ W^{-1}(b(i, x); \lg x) \} \{ W(a(i, x); \lg x) \}$$

wird für $x = 0$ schwächer unendlich als $\frac{1}{x}$, verhält sich also daselbst regulär. Da derselbe Schluß für $x = \infty$ gilt, so ist $f(i, x)$ von x unabhängig. Derselbe Schluß ist aber noch durchführbar, wenn, was vorkommen kann, für eine endliche Anzahl von Eigenwerten in (60) das Gleichheitszeichen zu setzen ist. Man kann es nämlich dann stets so einrichten, daß bei $a(i, x)$ und $b(i, x)$ für diese Eigenwerte $\Re\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{2}$ ist; für $-b(i, x)$ ist dann $\Re\left(-\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{2}$, woraus sich dieselben Schlußfolgerungen ziehen lassen, wie oben. Da also ganz allgemein $f(i, x)$ von x unabhängig ist, so ergibt sich aus (43) und (39)

$$(65) \quad \{a(i, x)\} = \{f^{-1}(i, x)\} \{b(i, x)\} \{f(i, x)\}.$$

Die Kompositionen mit „Konstantenfeldern“ $f(i, x)^*$ und mit Funktionen $g(i, x; x)$ von dem in (54) bzw. (55) angegebenen Typus sind also die einzigen, bei denen Cauchy-Volterrasche Feldgleichungen wieder in solche übergehen.

§ 5.

Singuläre Stellen der Bestimmtheit.

Nach den Ausführungen des § 2 kann man für die Umgebung einer isolierten singulären Stelle der Feldgleichung (5) eine Cauchy-Volterrasche Feldgleichung angeben, deren Lösungen kogredient zu den entsprechenden Lösungen von (5) sind, d. h. man kann eine stetige Funktion $b(i, x)$ von i und x so bestimmen, daß

$$(66) \quad \{y(i, x; x)\} = \left\{ W\left(b(i, x); \lg \frac{x}{x_0}\right) \right\} \{f(i, x; x)\}$$

und $f(i, x; x)$ in der Umgebung von $x = 0$ eine eindeutige Funktion ist. Hat $f(i, x; x)$ die Eigenschaft, mit einer endlichen Potenz von x multipliziert sich in der Umgebung von $x = 0$ analytisch zu verhalten,

*) Schlesinger, l. c. S. 114.

so nennen wir $x = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit. Wir wollen nun zeigen, daß speziell $x = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit für die Feldgleichung

$$(67) \quad \frac{dy(i, x; x)}{dx} = \frac{a(i, x)}{x} + h(i, x; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) \left(\frac{a(\lambda, x)}{x} + h(\lambda, x; x) \right) d\lambda$$

ist, wenn $a(i, x)$ eine in i und x stetige Funktion, $h(i, x; x)$ aber eine in der Umgebung von $x = 0$ analytische Funktion ist, deren absoluter Betrag für alle in Betracht kommenden Werte von i und x daselbst unterhalb einer festen endlichen Grenze liegt.

Schlesinger*) behauptet dann weiterhin, daß man in diesem Falle nach vorhergehender einfacher Transformation es stets erreichen kann, daß

$$b(i, x) = a(i, x)$$

wird. Den Beweis erbringt Schlesinger, wie er mir mitteilt, wiederum durch Grenzübergang von einem endlichem Systeme. Wir wollen uns hier zum Beweise derselben Methode bedienen, wie im vorigen Paragraphen und setzen zu diesem Zwecke zunächst voraus, daß für alle Eigenwerte ρ von $a(i, x)$ die Ungleichung (60) bestehe, die wir aber gleich durch die genauere, auch die Ausnahmefälle umfassende Ungleichung

$$(60a) \quad -\frac{1}{2} + \delta < \Re\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq \frac{1}{2}$$

ersetzen, wobei δ eine zwar beliebig kleine, aber feste positive Zahl bedeutet.

Wir schreiben dann (67) in der Form

$$(68) \quad \frac{dy(i, x; x)}{dx} = \int_0^1 y(i, \lambda; x) \frac{a(\lambda, x)}{x} d\lambda + f(i, x; x),$$

wobei

$$(69) \quad f(i, x; x) = \frac{a(i, x)}{x} + h(i, x; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) h(\lambda, x; x) d\lambda$$

ist. Nach (42) erhält man dann für $y(i, x; x)$ die Volterrasche Integralgleichung

$$(70) \quad y(i, x; x) = \int_{x_0}^x d\xi \left[\frac{a(i, x)}{\xi} + h(i, x; \xi) + \int_0^1 d\lambda \left(\frac{a(\lambda, \xi)}{\xi} + h(\lambda, \xi; \xi) \right) W(a(\lambda, x; \xi); \lg \frac{x}{\xi}) \right] \\ + \int_{x_0}^x d\xi \left[\int_0^1 y(i, \lambda; \xi) h(\lambda, x; \xi) d\lambda + \int_0^1 d\lambda \int_0^1 y(i, \mu; \xi) h(\mu, \lambda; \xi) d\mu W(a(\lambda, x; \xi); \lg \frac{x}{\xi}) \right] \\ = \sigma_1 + \sigma_2.$$

*) C. R. l. c S. 1864.

Wir nehmen dabei zunächst an, daß x mit x_0 auf demselben durch 0 gehenden Radiusvektor liegt und daß $|x| \leq |x_0|$, also stets $|x| \leq |\xi|$ ist, woraus dann folgt, daß

$$(71) \quad \left| W\left(a(\lambda, x); \lg \frac{x}{\xi}\right) \right| < M \left| \frac{\xi}{x} \right|^{\frac{1}{2}-\delta}$$

ist, wenn M eine feste, endliche, positive Größe ist. Dieselbe Eigenschaft mögen in der Folge M_1, M_2, M_3, \dots haben. Also ist

$$(72) \quad |\sigma_1| < \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}}.$$

Sei ferner

$$\begin{aligned} (73) \quad z(x) &= \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}} + \int_{|x|}^{|x_0|} |z(\xi)| M_2 \left| \frac{\xi}{x} \right|^{\frac{1}{2}-\delta} |d\xi| \\ &= \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}} \left(1 + (|x_0| - |x|) M_2 + \frac{(|x_0| - |x|)^2}{1 \cdot 2} M_2^2 + \dots \right) \\ &= \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}} e^{(|x_0| - |x|) M_2} < \frac{M_3}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}}, \end{aligned}$$

dann ist

$$(74) \quad |y(i, x; x)| < |z(x)| < \frac{M_3}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}}.$$

Durch Wiederholung des oben in § 4 für $W^{-1}(b(i, x); \lg x)$ durchgeführten Schlusses folgt ebenso

$$(75) \quad |y^{-1}(i, x; x)| < \frac{M_4}{|x|^{\frac{1}{2}}},$$

wobei wegen (60a) hier δ im Exponenten von $|x|$ wegzulassen war.

Entsprechend den Ausführungen in § 4 denken wir uns ferner von vornherein $b(i, x)$ so transformiert, daß (60a) von selbst erfüllt ist, daß also

$$(76) \quad \left| W\left(b(i, x); \lg \frac{x}{x_0}\right) \right| < \frac{M_5}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}},$$

$$(77) \quad \left| W^{-1}\left(b(i, x); \lg \frac{x}{x_0}\right) \right| < \frac{M_6}{|x|^{\frac{1}{2}}}$$

wird. Nach (66) ist aber

$$f(i, x; x) = \left\{ W^{-1} \left(b(i, x; \lg \frac{x}{x_0}) \right) \right\} \{ y(i, x; x) \},$$

also

$$(78) \quad |f(i, x; x)| < \frac{M_0}{|x|^{\frac{1}{2}}} + \frac{M_1}{|x|^{\frac{1}{2}-\delta}} + \frac{M_0 \cdot M_2}{|x|^{1-\delta}}.$$

Diese Formel gilt zunächst nur, wenn x sich von x_0 aus geradlinig dem Werte $x=0$ nähert; aus (6) folgt aber, daß (74) und damit (78) bei jeder geradlinigen Annäherung an $x=0$ gilt. Da nun $f(i, x; x)$ in der Umgebung von $x=0$ eindeutig ist und nach (78) $|f(i, x; x)| \cdot |x|^{1-\delta}$ in der Umgebung von $x=0$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, so folgt, daß $f(i, x; x)$ sich in der Umgebung von $x=0$ analytisch verhält.

Dieselbe Eigenschaft ergibt sich aus (75) und (76) für $f^{-1}(i, x; x)$. Wir setzen nun

$$(79) \quad f(i, x; x) = f_1(i, x) + x f_2(i, x; x) = \{ f_1(i, x) \} \{ x \bar{f}(i, x; x) \} \\ = f_1(i, x) + x \bar{f}(i, x; x) + x \int_0^1 f_1(i, \lambda) \bar{f}(\lambda, x; x) d\lambda,$$

wobei also

$$(80) \quad \bar{f}(i, x; x) = f_2(i, x; x) + \int_0^1 f_1^{-1}(i, \lambda) f_2(\lambda, x; x) d\lambda$$

und

$$f_1^{-1}(i, \lambda) = f^{-1}(i, \lambda; 0)$$

ist. Es sei jetzt

$$(81) \quad \left\{ W \left(b(i, x; \lg \frac{x}{x_0}) \right) \right\} \{ f_1(i, x) \} = \left\{ W \left(b_1(i, x; \lg \frac{x}{x_0}) \right) \right\},$$

also

$$(82) \quad \{ y(i, x; x) \} = \left\{ W \left(b_1(i, x; \lg \frac{x}{x_0}) \right) \right\} \{ x \bar{f}(i, x; x) \}.$$

Berechnet man dann $\frac{a(i, x)}{x} + h(i, x; x)$ mittelst (39), so ergibt sich

$$(83) \quad b_1(i, x) = a(i, x).$$

Wir haben daher den Satz:

Erfüllen alle Eigenwerte ϱ von $a(i, x)$ die Bedingung (60a), so gibt es eine in der Umgebung von $x=0$ analytische Funktion $\bar{f}(i, x; x)$, so daß, wenn $y(i, x; x)$ der Feldgleichung (67) genügt,

$$(84) \quad \{ y(i, x; x) \} = \left\{ W \left(a(i, x; \lg \frac{x}{x_0}) \right) \right\} \{ x \bar{f}(i, x; x) \}.$$

Im allgemeinen Falle gibt es endlich viele Eigenwerte von $a(i, x)$, für welche (60a) nicht erfüllt ist. Es ist daher wieder wie im § 4 zu untersuchen, wie $a(i, x)$ sich ändert, wenn wir einen reziproken Eigenwert

um 1 erhöhen bzw. vermindern. Wir zerlegen $a(i, x)$ in die zwei orthogonalen Summanden $a_1(i, x)$ und $a_2(i, x)$, wobei analog zu (53)

$$(85) \quad a_1(i, x) = \frac{\bar{\varphi}_1(i)}{q} [\bar{\psi}_1(x) + \bar{\psi}_2(x)] + \frac{\bar{\varphi}_2(i)}{q} [\bar{\psi}_2(x) + \bar{\psi}_3(x)] + \dots + \frac{\bar{\varphi}_r(i)}{q} \bar{\psi}_r(x)$$

ist und setzen

$$(86) \quad g(i, x; x) = (x-1) [\bar{\varphi}_1(i) (\bar{\psi}_1(x) + x\chi_1(x)) + \bar{\varphi}_2(i) (\bar{\psi}_2(x) + x\chi_2(x)) + \dots + \bar{\varphi}_r(i) (\bar{\psi}_r(x) + x\chi_r(x))],$$

wobei für alle Werte von m und n

$$(87) \quad \int_0^1 \bar{\varphi}_m(i) \chi_n(i) di = 0$$

sein möge. Dann ist:

$$(88) \quad g^{-1}(i, x; x) = \frac{1-x}{x} [\bar{\varphi}_1(i) (\bar{\psi}_1(x) + x\chi_1(x)) + \bar{\varphi}_2(i) (\bar{\psi}_2(x) + x\chi_2(x)) + \dots + \bar{\varphi}_r(i) (\bar{\psi}_r(x) + x\chi_r(x))].$$

Es sei

$$(89) \quad \{y(i, x; x)\} = \{y(i, x; x)\} \{g(i, x; x)\}$$

und

$$(90) \quad \frac{d y(i, x; x)}{dx} = \frac{a(i, x)}{x} + h_1(i, x; x) + \int_0^1 y(i, \lambda; x) \left(\frac{a(\lambda, x)}{x} + h_1(\lambda, x; x) \right) d\lambda,$$

wobei $h_1(\lambda, x; x)$ in der Umgebung von $x=0$ analytisch ist.

Dann folgt aus (39)

$$(91) \quad a(i, x) = \bar{\varphi}_1(i) \left(\frac{1}{q} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_1(x) + \frac{1}{q+1} \bar{\psi}_2(x) \right] + \bar{\varphi}_2(i) \left(\frac{1}{q} + 1 \right) \left[\bar{\psi}_2(x) + \frac{1}{q+1} \bar{\psi}_3(x) \right] + \dots + \bar{\varphi}_r(i) \bar{\psi}_r(x) \left(\frac{1}{q} + 1 \right) + a_2(i, x),$$

wenn

$$(92) \quad -\chi_1(x) \left(1 + \frac{1}{q} \right) + \int_0^1 \chi_1(\lambda) a(\lambda, x) d\lambda - \frac{\chi_2(x)}{q} + \int_0^1 \bar{\psi}_1(\lambda) h(\lambda, x; 0) d\lambda \\ - \int_0^1 \int_0^1 \bar{\psi}_1(\lambda) h(\lambda, \mu; 0) [\bar{\varphi}_1(\mu) \bar{\psi}_1(x) + \dots + \bar{\varphi}_r(\mu) \bar{\psi}_r(x)] d\lambda d\mu = 0, \\ -\chi_2(x) \left(1 + \frac{1}{q} \right) + \int_0^1 \chi_2(\lambda) a(\lambda, x) d\lambda - \frac{\chi_3(x)}{q} + \int_0^1 \bar{\psi}_2(\lambda) h(\lambda, x; 0) d\lambda \\ - \int_0^1 \int_0^1 \bar{\psi}_2(\lambda) h(\lambda, \mu; 0) [\bar{\varphi}_1(\mu) \bar{\psi}_1(x) + \dots + \bar{\varphi}_r(\mu) \bar{\psi}_r(x)] d\lambda d\mu = 0, \\ \dots \dots \dots \\ -\chi_r(x) \left(1 + \frac{1}{q} \right) + \int_0^1 \chi_r(\lambda) a(\lambda, x) d\lambda - * + \int_0^1 \bar{\psi}_r(\lambda) h(\lambda, x; 0) d\lambda \\ - \int_0^1 \int_0^1 \bar{\psi}_r(\lambda) h(\lambda, \mu; 0) [\bar{\varphi}_1(\mu) \bar{\psi}_1(x) + \dots + \bar{\varphi}_r(\mu) \bar{\psi}_r(x)] d\lambda d\mu = 0.$$

Ist daher $\frac{1}{1 + \frac{1}{q}}$ kein Eigenwert von $a(\lambda, x)$, so sind die Integralgleichungen (92) für die Funktionen χ auflösbar, wenn mit der letzten angefangen wird, in welcher * andeutet, daß sie ein Glied weniger enthält, als die anderen; ferner folgt nachträglich, daß die Gleichungen (87) erfüllt sind. Wir haben also tatsächlich erreicht*), daß $1 + \frac{1}{q}$ an die Stelle von $\frac{1}{q}$ getreten ist. Da wir entsprechend einen reziproken Eigenwert um eine Einheit vermindern können, so können wir durch wiederholte Anwendung von Transformationen der angegebenen Art erreichen, daß (60a) für die Eigenwerte erfüllt ist, wenn wir voraussetzen, daß sich *nicht zwei reziproke Eigenwerte von $a(i, x)$ um ganze Zahlen unterscheiden und daß zu denjenigen Eigenwerten von $a(i, x)$, für die (60a) nicht von vorneherein erfüllt ist, nur eine einzige Gruppe von Eigenfunktionen*, (analog zu $a_1(i, x)$ in (85)), gehört. Nach Ausführung aller dieser Transformationen gehe $y(i, x; x)$ über in $Y(i, x; x)$, $a(i, x)$ in $A(i, x)$, so daß also entsprechend (84)

$$(93) \quad \{Y(i, x; x)\} = \left\{W(A(i, x); \lg \frac{x}{x_0})\right\} \{x\bar{F}(i, x; x)\}$$

ist, wobei $\bar{F}(i, x; x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ analytische Funktion ist. Wir machen nun die Transformationen in umgekehrter Reihenfolge schrittweise rückwärts. Wir setzen also etwa, $g(i, x; x)$ als Typus nehmend,

$$(94) \quad \{Y(i, x; x)\} = \{Y_1(i, x; x)\} \{g(i, x; x)\}.$$

Geht dann $g^*(i, x; x)$ aus $g(i, x; x)$ hervor, indem man alle χ wegläßt, dann gibt es wegen der Übereinstimmung der Formeln (91) und (57) ein $A_1(i, x)$, so daß

$$(95) \quad \left\{W(A(i, x); \lg \frac{x}{x_0})\right\} = \left\{W(A_1(i, x); \lg \frac{x}{x_0})\right\} \{g^*(i, x; x)\},$$

also

$$(96) \quad \begin{aligned} &\{Y_1(i, x; x)\} \\ &= \left\{W(A_1(i, x); \lg \frac{x}{x_0})\right\} \{g^*(i, x; x)\} \{x\bar{F}(i, x; x)\} \{g^{-1}(i, x; x)\} \end{aligned}$$

wird.

Nun folgt durch direkte Ausrechnung, daß

$$\{g^*(i, x; x)\} \{x\bar{F}(i, x; x)\} \{g^{-1}(i, x; x)\}$$

*) Vgl. Anmerkung *) S. 525.

ebenso wie die dazu reziproke Funktion sich in der Umgebung von $x=0$ analytisch verhält; man kann also genau den Schluß anwenden, wie bei den Formeln (79)–(84); es folgt daher, analog zu (84) und (93),

$$(97) \quad \{Y_1(i, x; x)\} = \left\{W\left(A_2(i, x; \lg \frac{x}{x_0})\right)\right\} \{x \bar{F}_1(i, x; x)\}.$$

Wiederholt man den Schluß, so folgt, daß unter den *oben hervorgehobenen Voraussetzungen direkt* (84) gilt.

Ist dagegen $\frac{1}{1+\frac{1}{v}}$ in (92) ein Eigenwert von $a(i, x)$, so sind im all-

gemeinen die Integralgleichungen (92) nach den $\chi(x)$ nicht auflösbar. Wir lassen daher in (86) die Funktionen $\chi(x)$ ganz weg; dann treten aber in (91) in den in eckige Klammern gesetzten Faktoren von $\bar{\varphi}_1(i)$, $\bar{\varphi}_2(i)$ noch additive Zusatzglieder hinzu, nämlich die linken Seiten der ersten, bzw. zweiten usf. Gleichung (92), in denen jedesmal $\chi(x)$ durch Null ersetzt ist. Da alle Zusatzglieder gleichzeitig zu $\bar{\varphi}_1(x)$, $\bar{\varphi}_2(x)$, \dots , $\bar{\varphi}_r(x)$ orthogonal sind, so werden durch diese Zusatzglieder die Eigenwerte in (91) nicht geändert. Man kann also auch in diesem Falle durch eine endliche Anzahl von Transformationen des angegebenen Typus erreichen, daß (60a) erfüllt ist; d. h. man kann auch in dem vorliegenden Fall die *gegebene Integrodifferentialgleichung so transformieren, daß für die transformierte Integrodifferentialgleichung die Beziehung* (93) *gilt*, ohne jedoch die Transformationen im allgemeinen so rückgängig machen zu können, daß man direkt (84) erhält. Denn es wird dabei in der (95) entsprechenden Formel $g^*(i, x; x)$ mit $g(i, x; x)$ nicht denselben einfachen Zusammenhang haben, so daß

$$\{g^*(i, x; x)\} \{x \bar{F}(i, x; x)\} \{g^{-1}(i, x; x)\}$$

in $x=0$ einen Pol erster Ordnung haben kann. Dieses entspricht übrigens bekannten Verhältnissen bei Systemen endlich vieler linearer Differentialgleichungen.

§ 6.

Fundamentalsysteme einer linearen Integrodifferentialgleichung.

Nach den Ausführungen des letzten Paragraphen kann man, allenfalls nach einer vorausgegangenen Transformation, die Lösung der Feldgleichung (67) in der Form darstellen

$$(98) \quad \{y(i, x; x)\} = \left\{W\left(a(i, x; \lg \frac{x}{x_0})\right)\right\} \{x \bar{f}(i, x; x)\},$$

in der $\bar{f}(i, x; x)$ in eine Potenzreihe nach positiven, ganzzahligen, steigen-

den Potenzen von x entwickelbar ist. Die allgemeine Lösung der entsprechenden Integrodifferentialgleichung (2) erhält man daher nach (3) in der Form

$$(99) \quad y(x; x) = c(x) + \int_0^1 c(\lambda) W(a(\lambda, x); \lg \frac{x}{x_0}) d\lambda \\ + x \left[\int_0^1 \left(c(\mu) + \int_0^1 c(\lambda) W(a(\lambda, \mu); \lg \frac{x}{x_0}) d\lambda \right) \bar{f}(\mu, x; x) d\mu \right].$$

Es sei dann, wie in § 4, $a(i, x)$ in zwei orthogonale Summanden $a_1(i, x) + a_2(i, x)$ zerlegt und $a_1(i, x)$ durch (53) definiert.

Nun ist nach den Ausführungen des § 4

$$(100) \quad W(a_1(i, x); \lg \frac{x}{x_0}) \\ = \bar{\varphi}_1(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_1(x) + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \frac{\bar{\psi}_2(x)}{1!} + \dots + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \right)^{r-1} \frac{\bar{\psi}_r(x)}{(r-1)!} \right] \\ + \bar{\varphi}_2(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_2(x) + \dots + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left(\frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \right)^{r-2} \frac{\bar{\psi}_r(x)}{(r-2)!} \right] \\ + \dots \\ + \bar{\varphi}_{r-1}(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_{r-1}(x) + \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \frac{\lg \frac{x}{x_0}}{\varrho} \bar{\psi}_r(x) \right] \\ + \bar{\varphi}_r(i) \left[\left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} - 1 \right) \bar{\psi}_r(x) \right].$$

Wir setzen dann der Reihe nach in (99)

$$c(x) = \bar{\psi}_r(x), \bar{\psi}_{r-1}(x), \dots, \bar{\psi}_1(x)$$

und erhalten die Lösungen

$$(101) \quad y_1(x; x) = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left[\bar{\psi}_r(x) + x \int_0^1 \bar{\psi}_r(\mu) \bar{f}(\mu, x; x) d\mu \right], \\ y_2(x; x) = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \left[\bar{\psi}_{r-1}(x) + x \int_0^1 \bar{\psi}_{r-1}(\mu) \bar{f}(\mu, x; x) d\mu \right] \\ + \frac{\left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{\varrho}}}{\varrho} \lg \frac{x}{x_0} \left[\bar{\psi}_r(x) + x \int_0^1 \bar{\psi}_r(\mu) \bar{f}(\mu, x; x) d\mu \right],$$

usf. Besitzt $a_2(i, x)$ noch ϱ als Eigenwert, so erhält man weitere zu ϱ gehörige Systeme von Lösungen der angegebenen Art und entsprechendes gilt für jeden Eigenwert von $a(i, x)$. Die Frage, wann diese zu allen Eigenwerten von $a(i, x)$ gehörigen Lösungen ein Fundamentalsystem bilden, d. h., wann sich die allgemeinste Lösung von (2) linear durch sie darstellen läßt, ist also äquivalent mit der Frage, wann sich eine stetige Funktion $c(x)$ nach der Gesamtheit der zu allen Eigenwerten von $a(i, x)$ gehörigen Funktionen $\psi_1(x)$ entwickeln läßt.

Aus den großen Beschränkungen, die man dabei $a(i, x)$ auferlegen muß, geht hervor, daß es bei den Integrodifferentialgleichungen weit zweckmäßiger ist, nach dem Vorgange von Schlesinger die Feldgleichung an die Spitze zu stellen, wie in § 1 ausgeführt wurde.

Würzburg, Oktober 1915.

Die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung.

Von

EMMY NOETHER in Göttingen.

Nach Dedekind*) versteht man unter einer *isomorphen Abbildung des Körpers \mathfrak{A} auf ein System \mathfrak{B}* — das sich nachträglich ebenfalls als Körper ergibt — eine solche eindeutige Zuordnung, daß jedem Element aus \mathfrak{A} ein und nur ein Element aus \mathfrak{B} entspricht; und daß der Summe, der Differenz, dem Produkt und dem Quotienten irgend zweier Elemente aus \mathfrak{A} immer wieder Summe, Differenz, Produkt und Quotient der eindeutig entsprechenden Elemente aus \mathfrak{B} zugeordnet sind.

Eine solche Abbildung sei durch eine — nach dem Obigen eindeutige — Funktion $f(z)$ vermittelt. Durchläuft dann z alle Elemente x, y, \dots des Körpers \mathfrak{A} , so ist also $f(z)$ charakterisiert durch die Funktionalgleichungen:

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y); \quad (2) \quad f(x-y) = f(x) - f(y);$$

$$(3) \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y); \quad (4) \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}.$$

Im folgenden sollen die allgemeinsten eindeutigen Lösungen $f(z)$ dieser Funktionalgleichungen angegeben werden, wenn x, y, \dots alle reellen und komplexen Zahlen durchläuft; also die allgemeinste Funktion $f(z)$, die eine isomorphe Abbildung des Körpers aller komplexen Zahlen leistet.**). Ganz analog ergibt sich die Lösung für beliebige Körper.

*) Vgl. etwa: Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie (4. Aufl.). Supplement XI, § 161. Die der Gruppentheorie nachgebildete Bezeichnung „isomorphe Abbildung“ oder „Isomorphismus“ findet sich erst in der späteren Literatur; Dedekind spricht von den „Permutationen eines Körpers“.

**) Diese Frage wurde mir gegenüber gelegentlich von Herrn Landau aufgeworfen. Wie ich nachträglich bemerke, findet sich ein Teil der Lösungen schon bei H. Lebesgue: Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans. Atti Acad. Torino, 1906/07; und ebenso implizit bei A. Ostrowski: Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie. Crelles Journal 143 (1913), § 2.

Die allgemeinsten Lösungen der Funktionalgleichung (1) hat G. Hamel*) vermöge einer *linearen* Basis aller Zahlen konstruiert. Die hier gegebene Konstruktion der Lösungen von (1) bis (4) — also der Abbildungsfunktion, der gegenüber die rationalen und algebraischen Operationen invariant sind — bedient sich der *rationalen* und *algebraischen* Basis aller Zahlen. Nachdem in 1. die isomorphe Abbildung genauer diskutiert wird, werden in 2. notwendige Bedingungen für $f(x)$ gegeben, die in 3., als hinreichend erkannt, zur wirklichen Konstruktion führen.***) — Die Lösungen von (1) bis (4) sind bekanntlich mit Ausnahme von $f(x) = x$ oder \bar{x} unstetig; in 4. wird weitergehend gezeigt, daß sie „extrem unstetig“ sind — eine Tatsache, die G. Hamel für die reellen Lösungen von (1) nachgewiesen hat, die aber dort im Komplexen nicht erfüllt zu sein braucht.***)

1. Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus den Funktionalgleichungen (1) bis (4), und zwar direkt für allgemeine Körper \mathfrak{A} . Nach (1) folgt aus der Eindeutigkeit: $f(0) = 0$. Bei nicht verschwindendem $f(y)$ kann also auch das ursprüngliche y nicht verschwinden, und die Funktionalgleichungen (1) bis (4) zeigen somit, daß das Abbildungssystem \mathfrak{B} aller Werte $f(x)$ wieder einen Körper bildet. Schreibt man umgekehrt die Anfangsbedingung $f(0) = 0$ vor, so folgt aus (2) die Eindeutigkeit der Funktion $f(x)$: *Eindeutigkeitsforderung oder Anfangsbedingung $f(0) = 0$ sind also gleichwertig*. Aus (4) folgt, daß $f(x)$ nicht identisch verschwinden kann; aus (3) weiter, daß $f(x)$ nur verschwindet für $x = 0$. Denn aus $f(y) = 0$ und $y \neq 0$ würde folgen, daß $\frac{x}{y}$ auch zu \mathfrak{A} gehört:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot f(y) = 0,$$

also im Widerspruch zu (4) identisches Verschwinden von $f(x)$. Aus $f(x) = f(y)$ folgt somit $x = y$; d. h. jedem Wert von $f(x)$ entspricht auch ein und nur ein Wert von x : $f(x)$ ist eine umkehrbar eindeutige Funktion von x . Wie die Funktionalgleichungen zeigen, ist die durch die Umkehrfunktion vermittelte Abbildung wieder eine isomorphe. Da jede rationale Operation aus einer endlichen Anzahl von Additionen, Multiplikationen und ihrer Umkehrungen zusammengesetzt ist, kann man also auch sagen: *Durch die isomorphe Abbildung ist eine eindeutige Beziehung zwischen*

*) G. Hamel: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann. 60, S. 459 (1905).

**) Vgl. parallel verlaufende Betrachtungen in meiner Arbeit: Die allgemeinsten Bereiche aus ganzen transzendenten Zahlen. Math. Ann. 77, S. 103 (1915), besonders § 8 und § 10.

***) Die Hamelsche Bezeichnung „total unstetig“ wird in der sonstigen Literatur in anderem Sinne gebraucht.

den Elementen aus \mathfrak{A} und aus \mathfrak{B} hergestellt, derart, daß alle zwischen je endlich vielen Elementen aus \mathfrak{A} bestehenden rationalen Relationen:

$$F(x, y, \dots, t) = 0$$

in \mathfrak{B} erhalten bleiben und umgekehrt.

Es sei noch bemerkt, daß $f(x)$ für einen Körper schon charakterisiert ist durch die Funktionalgleichungen (1) und (3), die Forderung daß $f(x)$ nicht identisch verschwindet und die Anfangsbedingung $f(0) = 0$. Es folgt nämlich (2) aus (1), indem man x durch das zu \mathfrak{A} gehörige $(x-y)$ ersetzt; und dann ergibt (2) und $f(0) = 0$ die Eindeutigkeit von $f(x)$; wie oben gezeigt, folgt aus (3) weiter, indem man x durch das zu \mathfrak{A} gehörige $\frac{x}{y}$ ersetzt, daß $f(y)$ für $y \neq 0$ nicht verschwinden kann, also die Gültigkeit von (4) und zugleich die Eineindeutigkeit. Legt man statt eines Körpers einen Integritätsbereich \mathfrak{J} zugrunde, so braucht $\frac{x}{y}$ nicht zu \mathfrak{J} zu gehören, und man kann aus (3) nicht auf Eineindeutigkeit schließen. Hier genügt aber die folgende, bekannteste Fassung: Eine isomorphe Abbildung ist eine *eineindeutige* Zuordnung zwischen den Elementen aus \mathfrak{J} und \mathfrak{J}' , derart, daß der Summe und dem Produkt immer Summe und Produkt entsprechen.*)

2. Von jetzt an sei der Einfachheit halber an Stelle von \mathfrak{A} der Körper \mathfrak{C} aller reellen und komplexen Zahlen zugrunde gelegt. Es handelt sich zunächst um die Diskussion der Wertsysteme, die $f(x)$ annimmt. Aus (3) oder (4) folgt: $f(1) = 1$, und daraus vermöge der Funktionalgleichungen für jede rationale Zahl α : $f(\alpha) = \alpha$; jede rationale Zahl entspricht also bei der Abbildung sich selbst. Da eine algebraische Zahl β einer irreduziblen Gleichung mit rationalen Koeffizienten $F(\beta, \alpha) = 0$ genügt, folgt nach 1. und dem eben Bemerkten für $f(\beta)$: $F(f(\beta), \alpha) = 0$; jede algebraische Zahl geht also in sich oder eine ihrer Konjugierten über, und der Gesamtheit der algebraischen Zahlen entspricht wegen der Eineindeutigkeit wieder der Körper aller algebraischen Zahlen. Um das Verhalten der transzendenten Zahlen zu erkennen und zugleich die konjugierten Werte zu trennen, legen wir eine *rationale Basis aller Zahlen***) zugrunde, d. h. ein System Θ von Zahlen θ , die alle Zahlen rational — mit rationalen Koeffizienten***) — auszudrücken gestatten, während bei mindestens einer Wohlordnung keine Basiszahl rational durch endlich viel vorangehende ausdrückbar ist. Die Existenz dieser Basis folgt genau

*) Vgl. zu Nr. 1: Dedekind a. a. O. § 161.

**) Vgl. meine zitierte Arbeit über „ganze transzendente Zahlen“, § 6.

***) Unter „rationaler Funktion“ soll immer eine solche, deren Koeffizienten auch rationale Zahlen sind, verstanden sein.

analog wie lineare und algebraische Basen aus dem Wohlordnungssatz. Es sei \mathfrak{C} einer Wohlordnung Ω unterworfen; dann ist jede Zahl entweder rational durch endlich viele vorangehende ausdrückbar — oder von den vorangehenden rational unabhängig. Diese letzteren Zahlen bilden die Basis Θ , und der Induktionsschluß zeigt, daß wirklich jede Zahl rational durch endlich viele Θ ausdrückbar ist.

Zu jeder Basiszahl θ ist der „Abschnittskörper $\mathfrak{R}(\theta)$ “ definiert, bestehend aus allen rationalen Verbindungen derjenigen Basiszahlen, die θ in der Wohlordnung vorangehen. Als Abschnittskörper der ersten Basiszahl ist der Körper \mathfrak{R} aller rationalen Zahlen zu betrachten. θ kann zweierlei Verhalten in bezug auf $\mathfrak{R}(\theta)$ zeigen: es kann von $\mathfrak{R}(\theta)$ algebraisch-abhängig oder algebraisch-unabhängig sein. Da nach 1. alle in \mathfrak{C} geltenden Relationen auch im Abbildungskörper gelten und umgekehrt, bildet die Gesamtheit der den θ entsprechenden Werte $f(\theta)$ eine Basis des Abbildungsbereichs, die vermöge der Wohlordnung von Θ selbst wohlgeordnet ist. Dem Abschnittskörper $\mathfrak{R}(\theta)$ entspricht also insbesondere der Abschnittskörper $\mathfrak{R}(f(\theta))$; und je nachdem θ von $\mathfrak{R}(\theta)$ algebraisch-abhängig oder unabhängig ist, gilt das gleiche von $f(\theta)$ in bezug auf $\mathfrak{R}(f(\theta))$; und im Fall der Abhängigkeit entsprechen sich auch die irreduzibeln Gleichungen für θ und $f(\theta)$. Die Gesamtheit der Werte θ , die jeweils von $\mathfrak{R}(\theta)$ algebraisch-unabhängig sind, bilden — wie wieder der Induktionsschluß zeigt — eine *algebraische Basis aller Zahlen**, d. h. ein System H von Zahlen η , die alle Zahlen algebraisch auszudrücken gestatten, zwischen denen selbst aber keine algebraischen Relationen bestehen. Dieser algebraischen Basis H entspricht im Abbildungsbereich wieder eine algebraische Basis Z , die wegen der Eineindeutigkeit von gleicher Mächtigkeit wie H ist — und zwar von der Mächtigkeit des Kontinuums, da durch algebraische Erweiterung die Mächtigkeit bekanntlich nicht vergrößert wird.** Aus der Kenntnis der Werte $f(\theta)$ ergibt sich aber $f(s)$ unmittelbar für alle Wertsysteme, da aus $s = \psi(\theta)$ stets folgt: $f(s) = \psi(f(\theta))$.

3. Wir zeigen jetzt, daß die gefundenen notwendigen Bedingungen tatsächlich auch die Konstruktion von $f(z)$ leisten. Die der algebraischen Basis H eineindeutig entsprechende Basis Z werde folgendermaßen konstruiert und H zugeordnet: Man lege eine zweite Wohlordnung Ω' zugrunde, die eine algebraische Basis Z' aller Zahlen liefert; es sei Z — mit den Elementen ξ — eine Teilmenge von Z' von gleicher Mächtigkeit wie Z' , und folglich wie H . Jedem Element η_i von H sei nun ein (gleich

*) Vgl. E. Zermelo: Über ganze transzendente Zahlen, § 1, Math. Ann. 75 (1914).

**) Vgl. E. Steinits: Algebraische Theorie der Körper. Crelles Journal 187 (1910), § 24.

numeriertes) ξ_i eindeutig zugeordnet durch die Bestimmung: ξ_i sei das in der Wohlordnung Ω' erste aller derjenigen Elemente aus Z , die keinem η_i vorangehenden Element aus H zugeordnet sind.

Nun sei $f(z)$ definiert:

- a) für alle rationalen Zahlen α durch $f(0) = 0$, $f(\alpha) = \alpha$;
- b) für alle Größen der algebraischen Basis H durch $f(\eta_i) = \xi_i$;
- c) für alle übrigen Größen ϑ der rationalen Basis Θ — die vom Abschnittskörper $\mathbb{K}(\vartheta)$ algebraisch abhängen und folglich einer in $\mathbb{K}(\vartheta)$ irreduzibeln Gleichung $F(\vartheta; \vartheta_1 \dots \vartheta_r) = 0$ genügen — als Nullstelle der Gleichung $F(f(\vartheta); f(\vartheta_1) \dots f(\vartheta_r)) = 0$;
- d) für alle übrigen Werte z , die nach der Definition von Θ als $z = \psi(\vartheta_1 \dots \vartheta_n)$ darstellbar sind durch $f(z) = \psi(f(\vartheta_1) \dots f(\vartheta_n))$.*)

Um zu zeigen, daß das so definierte $f(z)$ tatsächlich den Funktionalgleichungen (1) bis (4) genügt, genügt nach Nr. 1 der Nachweis für (1) und (3), da \mathbb{C} ein Körper ist und $f(z)$ wegen (a) und (b) nicht identisch verschwinden kann und überdies die Anfangsbedingung $f(0) = 0$ erfüllt. Vermöge der rationalen Basis Θ drücke sich $x, y, x + y$ aus durch:

$$x = \psi_1(\vartheta_1 \dots \vartheta_l), \quad y = \psi_2(\vartheta_1 \dots \vartheta_l), \quad (x + y) = \psi_3(\vartheta_1 \dots \vartheta_l);$$

der Nachweis, daß $f(z)$ der Funktionalgleichung (1):

$$f(x) + f(y) - f(x + y) = 0$$

genügt, ist also nach (d) identisch damit, daß aus

$$\psi_1(\vartheta) + \psi_2(\vartheta) - \psi_3(\vartheta) = \frac{H_1(\vartheta)}{H_2(\vartheta)} = 0$$

stets folgt:

$$\psi_1(f(\vartheta)) + \psi_2(f(\vartheta)) - \psi_3(f(\vartheta)) = \frac{H_1(f(\vartheta))}{H_2(f(\vartheta))} = 0,$$

wo H_1, H_2 ganze rationale Funktionen ihrer Argumente bedeuten. Auf genau die gleiche Form der Bedingung führt aber auch die Funktionalgleichung (3); und das Erfülltsein aller Funktionalgleichungen ist also identisch mit dem Bestehen der — nach Nr. 1 und 2 auch notwendigen — Bedingung, daß für jede ganze rationale Funktion $H(\vartheta)$ stets folgt: aus $H(\vartheta) = 0$ auch $H(f(\vartheta)) = 0$; aus $H(\vartheta) \neq 0$ auch $H(f(\vartheta)) \neq 0$, letzteres wegen des Auftretens des Nenners.

Daß dies tatsächlich der Fall, zeigt der Induktionsschluß. Sei etwa in $H(\vartheta_1 \dots \vartheta_r)$ die Basisgröße ϑ_r , die in der Wohlordnung letzte unter $\vartheta_1 \dots \vartheta_r$ **) dann läßt sich $H(\vartheta_1 \dots \vartheta_r) = 0$ auffassen als eine Relation,

*) In (d) ist (a) als Spezialfall enthalten.

**) Die Ausdrücke $H(\vartheta)$, die nullten Grades in den ϑ sind, gehen durch die Abbildung in sich über, brauchen also nicht weiter untersucht zu werden.

der ϑ_i in bezug auf den Abschnittskörper $\mathfrak{K}(\vartheta_i)$ genügt, und ebenso $H(f(\vartheta_1) \cdots f(\vartheta_r)) = 0$ als Relation von $f(\vartheta_i)$ in bezug auf $\mathfrak{K}(f(\vartheta_i))$. Wären nun nicht alle Relationen $H(\vartheta) = 0$ auch für $f(\vartheta)$ erfüllt und umgekehrt, so müßte es eine erste Basisgröße — etwa ϑ_0 — geben, für die mindestens eine in bezug auf $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ geltende Relation nicht für den Abbildungskörper erhalten bliebe oder umgekehrt, während die vorangehenden Abschnittskörper $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ und $\mathfrak{K}(f(\vartheta_0))$ isomorph wären. Insbesondere ist nach (a) der Abschnittskörper der ersten Basisgröße von Θ , der Körper \mathfrak{R} aller rationalen Zahlen, seinem Abbildungskörper isomorph. Sei nun $H(\vartheta_0)$ von der Form:

$$H(\vartheta_0) = a_0(\vartheta) \cdot \vartheta_0^x + a_1(\vartheta) \cdot \vartheta_0^{x-1} + \cdots + a_x(\vartheta),$$

wo $a_i(\vartheta)$ Größen aus $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$. Dann sind zwei Möglichkeiten:

1) ϑ_0 ist von $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ algebraisch unabhängig: Dann ist $H(\vartheta_0) = 0$ identisch in ϑ_0 erfüllt,*), man hat $a_i(\vartheta) = 0$ für alle Koeffizienten und folglich wegen des Isomorphismus von $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ und $\mathfrak{K}(f(\vartheta_0))$ auch $a_i(f(\vartheta)) = 0$; aus $H(\vartheta_0) = 0$ folgt also stets $H(f(\vartheta_0)) = 0$. Sei umgekehrt $H(f(\vartheta_0)) = 0$; da ϑ_0 — als von $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ algebraisch-unabhängig — zu der algebraischen Basis H gehört, gehört $f(\vartheta_0)$ nach (b) zu der algebraischen Basis Z und ist von $\mathfrak{K}(f(\vartheta_0))$ algebraisch-unabhängig. Es verschwinden also alle $a_i(f(\vartheta))$ und wegen des Isomorphismus alle $a_i(\vartheta)$; aus $H(f(\vartheta_0)) = 0$ folgt $H(\vartheta_0) = 0$ oder aus $H(\vartheta_0) \neq 0$ auch $H(f(\vartheta_0)) \neq 0$.

2) ϑ_0 ist von $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ algebraisch-abhängig: Dann ist $H(\vartheta_0)$ durch die in bezug auf $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ irreduzible Gleichung $F(\vartheta_0)$ teilbar, d. h. es gilt identisch in t :

$$H(t; a_i(\vartheta)) = F(t, \vartheta_0) \cdot G(t, \vartheta_0).$$

Da aber alle auftretenden Koeffizienten zu $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ gehören, ist in dem isomorphen Körper $\mathfrak{K}(f(\vartheta_0))$ die entsprechende Relation erfüllt:

$$H(t; a_i(f(\vartheta))) = F(t; f(\vartheta_0)) \cdot G(t; f(\vartheta_0)).$$

Nach (c) war aber $f(\vartheta_0)$ so gewählt, daß es Nullstelle von $F(t; f(\vartheta_0))$; aus $H(\vartheta_0) = 0$ folgt also $H(f(\vartheta_0)) = 0$.

Hat man umgekehrt $H(f(\vartheta_0)) = 0$, so folgt ebenso aus der Teilbarkeit von $H(t; a_i(f(\vartheta)))$ durch die in bezug auf $\mathfrak{K}(f(\vartheta_0))$ irreduzible Funktion $F(t; f(\vartheta_0))$ für den isomorphen Körper $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ die Teilbarkeit von $H(t; a_i(\vartheta))$ durch $F(t; \vartheta_0)$; und da $F(t; f(\vartheta_0))$ aus der irreduziblen Gleichung für ϑ_0 durch isomorphe Beziehung entstanden ist, und diese Beziehung eineindeutig ist, stellt $F(t; \vartheta)$ notwendig die irreduzible Funktion

*) Vermöge der Ausdrückbarkeit der x, y, \dots durch die ϑ kann diese Form der Relation sehr wohl auftreten.

dar, deren Nullstelle ϑ_0 ist. Aus $H(f(\vartheta_0)) = 0$ folgt also $H(\vartheta_0) = 0$ oder aus $H(\vartheta_0) \neq 0$ auch $H(f(\vartheta_0)) \neq 0$.

Aus isomorphen Abschnittskörpern $\mathfrak{K}(\vartheta_0)$ und $\mathfrak{K}(f(\vartheta_0))$ gehen also durch Adjunktion von ϑ_0 , bzw. $f(\vartheta_0)$ auch isomorphe Körper hervor; die Annahme, daß dies für ein ϑ_0 nicht der Fall, führt zu einem Widerspruch. Somit ist bewiesen, daß die durch (a) bis (d) definierte Funktion $f(s)$ tatsächlich eine Lösung der Funktionalgleichungen (1) bis (4) darstellt, und zwar nach 2. die allgemeinste.

Alle zur Konstruktion von $f(s)$ benutzten Überlegungen haben nur die Tatsache benutzt, daß die Gesamtheit \mathfrak{C} aller Zahlen einen Körper bildet, und gelten somit für jeden abstrakt definierten Körper \mathfrak{A} ; wobei zu bemerken ist, daß dem Körper \mathfrak{A} der rationalen Zahlen der „Primkörper“ von \mathfrak{A} entspricht, d. h. der aus dem Einheits-element von \mathfrak{A} durch die Operationen der Addition und Multiplikation und ihrer Umkehrungen abgeleitete Körper. Ersetzt man daher in (a) bis (d) die rationalen Zahlen durch die Elemente des Primkörpers, so leistet die so entstehende Funktion $f(s)$ die allgemeinste isomorphe Abbildung eines beliebigen abstrakt definierten Körpers.

4. Es sei nun noch gezeigt, daß die für den Körper \mathfrak{C} aller reellen und komplexen Zahlen definierten Funktionen $f(s)$ — die bekanntlich mit Ausnahme von $f(s) = s$ oder \bar{s} unstetig sind — *extrem unstetig* sind, d. h. daß es in der Umgebung jeder reellen oder komplexen Zahl s_0 Werte s gibt, für die $f(s)$ einem beliebig vorgegebenen Wert Z_0 beliebig nahe kommt. Diese extreme Unstetigkeit kommt, wie G. Hamel a. a. O. nachgewiesen hat, den für alle reellen Zahlen definierten reellen Lösungen $\varphi(x)$ der Funktionalgleichung (1) zu; aber — wie die unten gegebenen Beispiele zeigen — nicht notwendig den für das Komplexe definierten Lösungen. Hamel schließt folgendermaßen: Ist $\varphi(x)$ von $C \cdot x$ verschieden, so gibt es mindestens zwei Werte der linearen Basis*), etwa x_1 und x_2 , so daß $\varphi(x_1):x_1 \neq \varphi(x_2):x_2$; dann haben die beiden Gleichungen

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = a; \quad \alpha \varphi(x_1) + \beta \varphi(x_2) = b$$

eine Lösung in reellen Zahlen α, β ; und folglich läßt sich a und b durch rationale Zahlen α, β beliebig approximieren; wegen der rationalen Zahlen α, β stellt aber $\alpha \varphi(x_1) + \beta \varphi(x_2)$ wirklich $\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2)$ dar. Dieser Schluß versagt bei komplexen Wertsystemen; tatsächlich lassen sich auch im

*) Die lineare Basis aller (reellen) Zahlen ist gegeben durch ein System von (reellen) Zahlen, das alle (reellen) Zahlen linear, mit rationalen Koeffizienten, auszudrücken gestattet, während zwischen je endlich vielen Basiszahlen keine lineare Relation mit rationalen Koeffizienten besteht.

Komplexen definierte Lösungen von (1) angeben, die unstetig, aber nicht extrem unstetig sind, etwa:

$$\varphi(z) = \varphi(x + iy) = \varphi(x) + i(y + \varphi(x)),$$

wo $\varphi(x)$ eine reelle, im Reellen extrem unstetige Lösung bedeutet; oder noch einfacher $\varphi(z) = \varphi(x)$. Der reelle Teil von $\varphi(z)$ ist beidemale extrem unstetig, während der imaginäre durch den reellen mitbestimmt ist.

Dies Verhalten, und zugleich das Verhalten der Funktion $f(z)$, wird vollständig klar, wenn man den Begriff des Rangs einführt. Wir setzen $z = x + iy$, $\varphi(z) = X + iY$, und nennen $\varphi(z)$ bzw. vom Rang vier, drei, zwei oder eins, je nachdem keine, eine, zwei oder drei linear unabhängige Relationen existieren:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 X + c_4 Y = 0,$$

wo die c natürlich reelle Zahlen sind.

1) Sei $\varphi(z)$ vom Rang vier. Dann existieren mindestens vier Werte der linearen Basis, etwa z_1, z_2, z_3, z_4 , so daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Die Gleichungen

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = a,$$

$$\alpha y_1 + \quad \quad \quad + \delta y_4 = b,$$

$$\alpha X_1 + \quad \quad \quad + \delta X_4 = A,$$

$$\alpha Y_1 + \quad \quad \quad + \delta Y_4 = B$$

haben somit eine Lösung in reellen Zahlen α, \dots, δ , und a, b, A, B lassen sich durch rationale Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebig approximieren. Man hat zudem:

$$\begin{aligned} \alpha(X_1 + iY_1) + \beta(X_2 + iY_2) + \gamma(X_3 + iY_3) + \delta(X_4 + iY_4) \\ = \varphi(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 + \delta z_4). \end{aligned}$$

„Im allgemeinen“ sind also die Lösungen $\varphi(z)$ auch im Komplexen extrem unstetig; die *Unstetigkeitswerte* von $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z_0 = a + ib$ bilden eine *zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit*.

2) $\varphi(z)$ vom Rang drei. Dann gibt es mindestens drei Wertsysteme der linearen Basis, etwa z_1, z_2, z_3 , so daß die obige Determinante den Rang drei hat. Die Werte a, b, A, B , die der Relation

$$c_1 a + c_2 b + c_3 A + c_4 B = 0$$

genügen, und nur diese, lassen sich beliebig approximieren; die *Unstetigkeitswerte* bilden eine durch $z_0 = a + ib$ bestimmte *eindimensionale lineare*

Mannigfaltigkeit. Wie die angegebenen Beispiele zeigen, kann dieser Fall wirklich eintreten.

3) $\varphi(s)$ vom Rang zwei. Da man stets zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 wählen kann, so daß $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$, haben die Relationen die Form:

$$X = \lambda_1 x + \lambda_2 y; \quad Y = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Das daraus sich ergebende

$$\varphi(s) = (\lambda_1 x + \lambda_2 y) + i \cdot (\mu_1 x + \mu_2 y)$$

stellt aber die allgemeinste stetige Lösung der Funktionalgleichung (1) im Gebiet der komplexen Zahlen dar.

4) $\varphi(s)$ vom Rang eins. Dieser Fall kann im Gebiet der komplexen Zahlen nicht eintreten, bedeutet im Gebiet der reellen Zahlen die stetige Lösung $\varphi(x) = C \cdot x$.

Wir zeigen nun, daß die für alle reellen und komplexen Zahlen definierten Lösungen $f(s)$ der Funktionalgleichungen (1) bis (4) nur den Rang zwei oder vier haben können. Dabei ergibt der Rang zwei nur die beiden stetigen Funktionen $f(s) = s$ oder \bar{s} , wie die Spezialisierung $f(1) = 1$ und $f(i) = \pm i$ in Verbindung mit 3) zeigt. Da der Rang eins schon oben ausgeschlossen, ist noch der Rang drei auszuschließen. Wir nehmen also an, daß mindestens eine Relation existiert:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 X + c_4 Y = 0,$$

so daß $f(s)$ vom Rang drei, eventuell von niedrigerem ist, und zeigen, daß unter dieser Annahme stets der letztere Fall statt hat. Wie wieder die Spezialisierung $f(1) = 1$; $f(i) = \pm i$ zeigt, geht die Relation über in:

$$c_3 (X - x) + c_4 (Y \mp y) = 0,$$

wo c_3 und c_4 nicht gleichzeitig verschwinden. Sei vorerst etwa $c_4 = 0$. Die Relation $(X - x) = 0$ bedeutet aber, daß einem rein imaginären s auch ein rein imaginäres $f(s)$ entspricht. Es gilt also für jedes reelle η : $f(i\eta) = i \cdot \eta$, wo η wieder reell ist. Daraus folgt aber wegen

$$f(i\eta) = \pm i f(\eta) \quad \text{auch} \quad f(\eta) = \pm \eta;$$

es entspricht also jedem reellen s auch ein reelles $f(s)$; und wegen $(X - x)$ gehen alle reellen Werte in sich über. Man hat somit nur $f(s) = s$ oder \bar{s} , also tatsächlich Rang zwei. Ganz analog schließt man, wenn $c_3 = 0$, $c_4 \neq 0$.

Sei nun c_3 und c_4 von Null verschieden, so daß die Relation in der Form geschrieben werden kann:

$$(Y \mp y) = c \cdot (X - x)$$

mit *reellem*, von Null verschiedenen, endlichen c . Dies bedeutet aber, daß für $y = \pm cx$ auch $Y = c \cdot X$ wird. Somit gilt, unter Berücksichtigung der Funktionalgleichungen, für jedes reelle ξ :

$$f(\xi \cdot (1 \pm ic)) = \mathfrak{X}(1 \pm ic) = f(\xi) \cdot (1 \pm if(c)),$$

wo \mathfrak{X} wieder reell ist. Hier kann aber nach Nr. 1 der Faktor von $f(\xi)$ nicht identisch verschwinden, und die Division ergibt:

$$f(\xi) = \mathfrak{X}(\sigma + i\tau)$$

mit reellen, von ξ und \mathfrak{X} unabhängigen σ und τ . Es gehört also insbesondere auch zu $\xi = 1$ ein reelles \mathfrak{X}_0 , und die Bedingung: $1 = \mathfrak{X}_0(\sigma + i\tau)$ zeigt, daß notwendig $\tau = 0$, also $f(\xi) = \sigma \cdot \mathfrak{X}$ wird. Es entspricht also jedem reellen s auch ein reelles $f(s)$; oder aus $y = 0$ folgt notwendig $Y = 0$. Damit geht aber die lineare Relation für *reelle* s über in $X - x = 0$;^{*)} jeder reelle Wert entspricht sich selbst; man hat nur $f(s) = s$ oder \bar{s} , also tatsächlich Rang zwei. Damit ist der Rang drei in allen Fällen ausgeschlossen. Da aber — wie die Untersuchungen der ersten Nummern zeigen — unstetige Lösungen tatsächlich existieren und diese also notwendig vom Rang vier sein müssen, so gilt nach 1) der Satz: „*Alle Lösungen $f(s)$ der Funktionalgleichungen (1) bis (4) — mit Ausnahme der stetigen Lösungen $f(s) = s$ oder \bar{s} — sind im Reellen und im Komplexen extrem unstetig.*“^{**)}

Erlangen, 30. Oktober 1915.

^{*)} Hier wird die Tatsache benutzt, daß $c \neq 0$, daß also weder c_3 noch c_4 verschwindet, während vorher nur $c_4 \neq 0$ benutzt war; deshalb mußte der Fall, daß eines dieser beiden verschwindet, vorweg genommen werden.

^{**) Lebesgue zeigt a. a. O., daß Real- und Imaginärteil von $f(s)$ beide „nicht-meßbare“ Funktionen von x und y sind; wie das Beispiel am Anfang von Nr. 4 $\varphi(s) = \varphi(x) + i(y + \varphi(x))$ zeigt, folgt daraus noch nicht die extreme Unstetigkeit im Komplexen.}

Gruppendeterminante und Körperdiskriminante.

Von

A. SPEISER in Straßburg.

Einleitung.

In jedem zyklischen Körper vom Grade n lassen sich bekanntlich mit Hilfe von n^{ten} Einheitswurzeln Zahlen bilden, die *Lagrangeschen Resolventen*, die beim Übergang zu den konjugierten bloß eine n^{te} Einheitswurzel als Faktor annehmen. Für beliebige Galoissche Körper läßt sich das entsprechende Problem folgendermaßen formulieren*): Gegeben ist eine Darstellung der Gruppe des Körpers durch homogene Substitutionen von m Variablen. Es soll aus den Zahlen des Körpers und gewissen weiteren Irrationalitäten ein System von m Zahlen gebildet werden, das beim Übergang zu den konjugierten Systemen jeweils die entsprechenden Substitutionen der gegebenen Darstellung der Gruppe erfährt.

Die Gesamtheit dieser Systeme läßt sich in einfacher Weise bestimmen. Es gibt genau m linear unabhängige darunter. Beschränkt man sich auf die ganzzahligen, so enthalten sie gemeinsame Idealteiler, die in der Körperdiskriminante aufgehen. Durch Determinantenbildung erhält man Zahlen, aus denen sich die Diskriminanten des Körpers und sämtlicher Unterkörper in einer durch die Gruppe allein bestimmten Weise zusammensetzen lassen. Die hier vorliegenden Verhältnisse werden unter gewissen vereinfachenden Bedingungen dargelegt.

§ 1.

Das Kleinsche Formenproblem.

Wir legen einen Galoisschen Körper K zugrunde. Seine Gruppe \mathcal{G} sei von der Ordnung g und ihre Elemente bezeichnen wir mit

$$E, A, B, \dots, S, \dots.$$

*) Vgl. das „Kleinsche Formenproblem“, Weber, Algebra, 2. Aufl., Bd. 2, S. 228 u. ff.

Entsprechend bezeichnen wir eine Zahl ω und ihre konjugierten mit

$$\omega = \omega_E, \omega_A, \omega_B, \dots, \omega_S, \dots,$$

dann sind die Permutationen der Galoisschen Gruppe in folgender Gestalt darstellbar:

$$\begin{pmatrix} \omega_E, \omega_A, \omega_B, \dots \\ \omega_S, \omega_{AS}, \omega_{BS}, \dots \end{pmatrix} \quad S = E, A, B, \dots$$

Nun sei eine irreduzible Darstellung Γ der Gruppe durch Matrizen mit Koeffizienten im Körper k gegeben. Wir benutzen dieselbe Bezeichnung, wie für die abstrakte Gruppe, und setzen:

$$E = (e_{ik}), A = (a_{ik}), \dots, S = (s_{ik}) \dots$$

Bezeichnen wir mit A^{-1} die inverse, mit A' die transponierte Substitution, so bilden die Elemente $E, A'^{-1}, \dots, S'^{-1}, \dots$ wieder eine Darstellung der Gruppe die wir mit $\bar{\Gamma}$ bezeichnen.

Wir bilden jetzt die folgende Matrix

$$M(\omega) = E \cdot \omega_E + A \cdot \omega_A + \dots = \left(\sum_{\omega} s_{ik} \omega_S \right);$$

setzen wir:

$$\sum_{\omega} s_{ik} \omega_S = \xi_{ik}(\omega),$$

dann wird:

$$M(\omega) = (\xi_{ik}(\omega)).$$

Wenn wir diese Matrix mit einer beliebigen Matrix S^{-1} der Gruppe rechts zusammensetzen, so erhalten wir:

$$M \cdot S^{-1} = S^{-1} \omega_E + A S^{-1} \omega_A + \dots = E \omega_S + A \omega_{AS} + \dots = (\xi_{ik}^S(\omega))$$

wobei wir mit ξ^S diejenige konjugierte algebraische Zahl bezeichnen, die aus ξ durch die Substitution (ω, ω_S) der Galoisschen Gruppe entsteht.

Indem wir die erste Zeile von M und von MS^{-1} vergleichen, erhalten wir das Resultat

$$\xi_{i1}^S(\omega) = \sum \bar{s}_{1k} \xi_{ik}(\omega),$$

$$\xi_{im}^S(\omega) = \sum \bar{s}_{mk} \xi_{ik}(\omega)$$

wobei

$$(\bar{s}_{ik}) = \bar{S}$$

gesetzt ist. Die Zahlen ξ_{ik} liegen in dem durch Zusammensetzung von k und K entstehenden Körper, den wir mit $K(k)$ bezeichnen. Wenn wir noch voraussetzen, daß K und k außer den rationalen Zahlen keine weiteren Zahlen miteinander gemein haben, so können wir das Resultat folgendermaßen aussprechen:

Satz 1: Jedes der m Zahlensysteme $\xi_{11}(\omega) \dots \xi_{im}(\omega)$ $i = 1, 2, \dots, m$ erfährt beim Übergang zu den konjugierten Zahlensystemen die entsprechenden Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$.

Dieselbe Eigenschaft besitzen offenbar auch die sämtlichen Systeme, die sich in der folgenden Gestalt schreiben lassen:

$$\alpha_1 \xi_{11} + \alpha_2 \xi_{21} + \dots + \alpha_m \xi_{m1}, \dots, \alpha_1 \xi_{1m} + \alpha_2 \xi_{2m} + \dots + \alpha_m \xi_{mm},$$

wobei man aber im allgemeinen die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ auf den Körper k beschränken wird.

Setzt man aber die Matrix $M(\omega)$ links mit S^{-1} zusammen, so erhält man:

$$S^{-1}M(\omega) = S^{-1}E\omega_E + S^{-1}A\omega_A + \dots = E\omega_S + A\omega_{SA} + \dots = M(\omega_S).$$

Wir erhalten so den Satz:

Satz 2: Ersetzt man in den m Zahlensystemen $\xi_{1i}(\omega), \dots, \xi_{mi}(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) die Zahl ω durch die konjugierte Zahl ω_S , so erfahren die Systeme jeweils die Substitution S^{-1} .

Wir behaupten nun weiter, daß sich jedes zu $\bar{\Gamma}$ gehörige System von Zahlen herleiten läßt, indem man im System $\xi_{11}(\omega), \dots, \xi_{im}(\omega)$ die Zahl ω geeignet wählt. Für die Koeffizienten der irreduziblen Darstellungen gelten nämlich die folgenden Formeln:*)

$$\sum_{s=c, a, b, \dots} s_{ik} \bar{s}_{im} = 0$$

außer für $i = l, k = m$

$$\sum_{s=c, a, b, \dots} s_{ik} \bar{s}_{ik} = \frac{g}{m}.$$

Hierbei bedeuten (s_{ik}) und (\bar{s}_{ik}) entsprechende Matrizen von Γ und $\bar{\Gamma}$. Sei nun ξ_1, \dots, ξ_m ein beliebiges zu $\bar{\Gamma}$ gehöriges System, so setze man:

$$\omega = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m,$$

dann wird:

$$\xi_{11}(\omega) = \sum_{\mathfrak{S}} s_{11} \omega_S = \frac{g}{m} \xi_1$$

und ebenso:

$$\xi_{1i}(\omega) = \sum_{\mathfrak{S}} s_{1i} \omega_S = \frac{g}{m} \xi_i.$$

Also haben wir den

Satz 3: Ist ξ_1, \dots, ξ_m ein beliebiges System von Zahlen aus $K(k)$, das beim Übergang zu den konjugierten Systemen die Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$ erfährt, so wird:

$$\xi_{1i}(\omega) = \frac{g}{m} \xi_i, \text{ wobei } \omega = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m.$$

*) I. Schur: Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Berliner Sitzungsberichte 1905, S. 406.

Hiernach erhält man alle solchen Systeme, indem man in $\xi_{11}(\omega), \dots, \xi_{1m}(\omega)$ die Zahl ω alle Zahlen des Körpers durchlaufen läßt.

Ein analoger Satz besteht für die in Satz 2 betrachtete Substitution.

Wählt man für ω eine Zahl, für die keine Beziehung besteht von der Gestalt

$$a_1\omega_E + a_2\omega_A + \dots = 0,$$

wobei a_1, a_2, \dots Zahlen aus k sind, so läßt sich jede Zahl α von $K(k)$ in der Gestalt:

$$\alpha = a_1\omega_E + a_2\omega_A + \dots$$

darstellen.

Daher läßt sich jedes Zahlensystem, daß zu $\bar{\Gamma}$ gehört, in der folgenden Gestalt darstellen:

$$\xi_{1i}(a_1\omega_E + a_2\omega_A + \dots) = a_1\xi_{1i}(\omega_E) + a_2\xi_{1i}(\omega_A) + \dots$$

und wenn man nun den Satz 2 anwendet, so erkennt man den folgenden

Satz 4: Jedes zu $\bar{\Gamma}$ gehörige Zahlensystem läßt sich linear zusammensetzen aus den m Zahlensystemen

$$\xi_{11}(\omega), \dots, \xi_{1m}(\omega) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

wenn zwischen den Größen $\omega = \omega_E, \omega_A, \dots$ keine lineare Relation mit Koeffizienten aus k besteht.

Wenn man in $\xi_{11}(\omega), \dots, \xi_{1m}(\omega)$ ω alle ganzen Zahlen von K durchlaufen läßt, so erhält man einen Modul von Zahlensystemen, da sich die Summe zweier Systeme, die aus ω_1 resp. ω_2 entstehen, ergibt, wenn man $\omega_1 + \omega_2$ einsetzt. Ebenso erhält man einen Modul, wenn man alle ganzzahligen unter den Systemen betrachtet.

Nun sei für $\bar{\Gamma}$ ein vollständiges System von Invarianten gegeben, die wir als Formen von m Variablen mit Koeffizienten in k voraussetzen. Ersetzt man die Variablen durch ein beliebiges zu $\bar{\Gamma}$ gehöriges System, so nehmen die Invarianten Zahlenwerte aus dem Körper k an. Die Systeme sind daher die Lösungen des Kleinschen Formenproblems für die Gruppe $\bar{\Gamma}$.

§ 2.

Fortsetzung, Benutzung von Unterkörpern.

Wenn man in der Matrix $M(\omega)$ für ω eine Zahl eines Unterkörpers einsetzt, so tritt oft der Fall ein, daß die Matrix zur Nullmatrix wird.

Sei ω eine Zahl, die gegenüber der Untergruppe \mathfrak{H} ungeändert bleibt, und sei ferner die Zerlegung von \mathfrak{G} nach \mathfrak{H} und ihren Nebengruppen in folgender Gestalt gegeben:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}T_2 + \dots + \mathfrak{H}T_r$$

dann wird:

$$M(\omega) = \left(\sum_{\mathfrak{S}} S \right) \omega + \left(\sum_{\mathfrak{S}} S \right) T_2 \omega_{T_2} + \dots$$

Die Summe der zu \mathfrak{S} gehörigen Matrizen aus Γ ist aber stets und nur dann $\neq 0$, wenn diese Darstellung von \mathfrak{S} vollständig reduziert die identische Darstellung enthält. Andernfalls verschwindet die Matrix M identisch. Hieraus folgt der

Satz 5: Zur Bildung eines zur Gruppe Γ gehörigen Systems kann man auch Zahlen aus solchen Unterkörpern benutzen, bei denen die zugehörige Untergruppe in der Darstellung Γ nach vollständiger Reduktion die identische Darstellung enthält.

Man erhält dann jeweils genau so viele unabhängige Systeme, wie die Untergruppe in der Darstellung Γ die identische Darstellung enthält.

Beispiel: Die Ikosaedergruppe gestattet eine Darstellung Γ resp. $\bar{\Gamma}$ in dreireihigen Matrizen,*) die erzeugt wird durch:

$$\Gamma: \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E^4 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{E^2 + E^3}{\sqrt{5}} & \frac{E + E^4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{E + E^4}{\sqrt{5}} & \frac{E^2 + E^3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

($E = 5$. Einheitswurzel).

$$\bar{\Gamma}: \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E^4 \end{pmatrix}, \quad \bar{T} = T', \quad \bar{U} = U.$$

S erzeugt eine Gruppe von der Ordnung 5, die offenbar brauchbar ist, weil sie die identische Darstellung einmal enthält.

Sei ω eine Zahl aus dem zu der Gruppe gehörigen Unterkörper.

Es wird

$$\sum_{i=1}^5 \bar{S}^i = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H.$$

*) Vgl. Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 213.

Als erzeugende Elemente für die Nebengruppen können wir wählen

$$E, U, T, UT, TS, UTS, \dots, TS^4, UTS^4$$

und erhalten:

$$\overline{H} \overline{U} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H} \overline{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{H} \overline{T} \overline{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2E\sqrt{5} & 2E^4\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man die konjugierten Zahlen mit $\omega, \omega', \dots, \omega^{(11)}$, so erhält man

$$\xi_{11} = 5(\omega - \omega') + \sqrt{5}(\omega'' - \omega''') + \dots,$$

und wenn man noch die Bezeichnung einführt:

$$\omega - \omega' = u_0, \quad \omega'' - \omega''' = u_0, \quad \dots, \quad \omega^{(10)} - \omega^{(11)} = u_4,$$

so folgen nach Division mit $\sqrt{5}$ die in der Theorie der Gleichung fünften Grades fundamentalen Größen:*)

$$A_0 = u_0 \sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

$$A_1 = 2(u_0 + E u_1 + E^2 u_2 + E^3 u_3 + E^4 u_4),$$

$$A_2 = 2(u_0 + E^{-1} u_1 + E^{-2} u_2 + E^{-3} u_3 + E^{-4} u_4).$$

Dies ist also das einzige durch Zahlen des Unterkörpers erzeugte System, welches beim Übergang zu den konjugierten die Gruppe Γ erfährt.

In gleicher Weise berechnet man das zu $\bar{\Gamma}$ gehörige System und erhält ohne Mühe die Zahlen:

$$\bar{A}_0 = u_0 \sqrt{5} + u_0 + \dots + u_4,$$

$$\bar{A}_1 = u_0 + E^{-1} u_1 + \dots + E^{-4} u_4,$$

$$\bar{A}_2 = u_0 + E u_1 + \dots + E^4 u_4.$$

Diese Größen sind von den vorigen nicht wesentlich verschieden; es wird

$$A_0 = \bar{A}_0, \quad A_1 = 2\bar{A}_2, \quad A_2 = 2\bar{A}_1.$$

Dem entspricht die Tatsache, daß Γ und $\bar{\Gamma}$ äquivalente Darstellungen sind.

*) Vgl. Klein l. c. S. 155, wo eine wenig abweichende Numerierung der u benutzt ist.

§ 3.

Die verallgemeinerten Lagrangeschen Resolventen.

Jetzt möge ein vollständiges System nicht äquivalenter Darstellungen der Gruppe durch Matrizen gegeben sein. Wir bilden die sämtlichen zugehörigen Größen ξ und bezeichnen sie mit $\xi_{ik}^{(l)}$, wobei der obere Index die Darstellung angeben soll, aus der das betreffende ξ stammt. Ferner wollen wir sie so lexikographisch anordnen, daß l, i, k dem l', i', k' vorangeht, wenn entweder $l < l'$ oder $l = l', i < i'$ oder $l = l', i = i', k < k'$ ist. Sei χ_l der Grad der durch l bezeichneten Darstellung, dann gilt die Beziehung*)

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_r^2 = g.$$

Es gibt also genau so viele verschiedene Größen ξ , als die Ordnung der Gruppe beträgt. In dieser bestimmten Reihenfolge bezeichnen wir sie mit

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g.$$

Wir können nun die Koeffizienten dieser Größen in ein quadratisches Schema ordnen und bezeichnen die so entstehende Matrix mit

$$U = (u_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, \dots, g),$$

so daß jetzt die ξ in folgender Gestalt auftreten:

$$\xi_i = u_{i1} \omega_E + u_{i2} \omega_A + \dots$$

Zwischen den Koeffizienten verschiedener irreduzibler Darstellungen gelten außer den Formeln in § 1 noch die folgenden Beziehungen:**)

$$\sum_{i,j} s_{ij} s'_{ik} = 0,$$

sobald die Darstellung Γ' , aus der die s' entnommen sind, nicht äquivalent mit $\bar{\Gamma}$ ist. Hieraus kann die inverse Determinante zu (u_{ik}) bestimmt werden. Wir bilden nämlich die Größen ξ , indem wir jede Darstellung Γ durch die Darstellung $\bar{\Gamma}$ ersetzen. Die Matrix dieser neuen Größen (\bar{u}_{ik}) entsteht aus (u_{ik}) durch Vertauschung gewisser Zeilen untereinander und ebenso gewisser Kolonnen. Setzt man jetzt (u_{ik}) und (\bar{u}_{ik}) Zeile mit Zeile zusammen, so erhält man eine Matrix, bei der alle Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonale verschwinden, während diese letzteren aus den Zahlen $\frac{g}{\chi_i}$ bestehen, wobei jeder dieser Quotienten χ_i^2 mal auftritt.

*) Frobenius: Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante, Berliner Sitzungsberichte 1896, S. 1363.

**) I. Schur, l. c.

Es wird also:

$$|u_{ik}| \cdot |\bar{u}_{ik}| = \frac{g^n}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots}$$

und, da sich die beiden Determinanten links höchstens um das Vorzeichen unterscheiden, so wird

$$|u_{ik}| = \pm \sqrt{\pm \frac{g^n}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots}}$$

Man hat nun bloß noch in $|\bar{u}_{ik}|$ jede Zeile mit dem zugehörigen Quotienten $\frac{x_i}{g}$ zu multiplizieren und die so entstehende Matrix zu transponieren, um die zu (u_{ik}) inverse Matrix (v_{ik}) zu erhalten und es wird:

$$(u_{ik})(v_{ik}) = (v_{ik})(u_{ik}) = (e_{ik}),$$

$$e_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Diese Gleichung gestattet, aus den Größen ξ die Größen ω_s zu berechnen. Setzt man wieder

$$\sum_{\mathfrak{g}} s_{ik}^{(\mathfrak{g})} \omega_s = \xi_{ik}^{(\mathfrak{g})},$$

so wird jetzt:

$$(1) \quad \omega_s = \sum_{i,k} \frac{x_i}{g} s_{ik}^{(\mathfrak{g})} \xi_{ik}^{(\mathfrak{g})}.$$

Satz 5: Hat man durch Lösung der sämtlichen Formenprobleme die Größen ξ berechnet, so findet man daraus die Zahl ω mit ihren Konjugierten durch die Formeln (1).

Wenn die Gruppe eine zyklische ist vom Primzahlgrad p , so führen unsere Ausdrücke auf die sogenannten Lagrangeschen Resolventen.

In der Tat: Sei A ein erzeugendes Element der Gruppe, so erhält man alle Darstellungen, indem man für A eine p^{ten} Einheitswurzel setzt. Es wird also:

$$\xi^{(\mathfrak{g})} = \omega_E + E^i \omega_A + E^{2i} \omega_A + \dots$$

Die Darstellung $\bar{\Gamma}$ entsteht aus Γ , indem man E durch E^{-1} ersetzt. Die Invariante aller Darstellungen ist die Funktion x^p , so daß sich hier das Problem vollständig erledigen läßt mit Hilfe von p^{ten} Wurzeln aus Zahlen des Körpers der p^{ten} Einheitswurzeln.

§ 4.

Reduktion des Gleichungsproblems auf ein irreduzibles Formenproblem.

Sei Γ eine irreduzible Darstellung, die homomorph ist mit der Gruppe des Körpers. Wenn wir eine Reihe $\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}$ berechnet haben durch Auflösung des Formenproblems, so enthält der Körper $K(\xi_{11}, \dots, \xi_{1m})$ den zugrunde gelegten Körper K . Es ist daher, z. B. mit dem Lagrangeschen Verfahren möglich, jede einzelne Zahl des Körpers, insbesondere ω selbst, zu berechnen. Mit Hilfe von Ausdrücken, die allein von der Gruppe abhängen, ist es aber möglich, dieses Problem in wesentlich einfacherer Weise zu lösen.

Wir betrachten dazu die Darstellung, die durch Komposition*) von Γ mit sich selbst entsteht. Sei

$$\Gamma^2 = g_{21}\Gamma^{(1)} + \dots + g_{2r}\Gamma^{(r)}$$

und sei S_2 die Substitution, welche diese vollständige Reduktion leistet. Ferner sei allgemein

$$\Gamma^i = g_{i1}\Gamma^{(1)} + \dots + g_{ir}\Gamma^{(r)}$$

und S_i die entsprechende Substitution, welche die vollständige Reduktion von Γ^i leistet.

Zunächst bemerken wir, daß sich jede der Größen ξ , die zu irgend einer Darstellung gehört, aus den Größen $\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}$ als ganze Funktion mit Koeffizienten aus dem Körper k zusammensetzen läßt. Sei d der höchste Grad, der für diese Funktionen notwendig ist. Wir bilden jetzt die Produkte

$$\xi_{1i} \cdot \xi_{1k} \quad (i, k = 1, \dots, m),$$

also

$$\xi_{11}\xi_{11}, \xi_{11}\xi_{12}, \dots, \xi_{11}\xi_{1m}, \xi_{12}\xi_{11}, \dots$$

Geht man zu den konjugierten Systemen dieser Produkte über, so erhält man diese, indem man auf das ursprüngliche System die Substitutionen der Gruppe Γ^2 ausübt. Wenn man jetzt noch auf das System der Produkte die Substitution S_2 anwendet, so zerfällt es in $g_{21} + g_{22} + \dots + g_{2r}$ Teilsysteme, von denen jedes der g_{21} ersten beim Übergang zu den konjugierten jeweils die Substitutionen $\Gamma^{(1)}$, die g_{22} nächsten die Substitutionen $\Gamma^{(2)}$ usw. erleiden.

Diese Systeme zusammen mit $\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}$ brauchen nicht linear unabhängig zu sein, aber wir wählen für jede Gruppe $\Gamma^{(i)}$ eine möglichst große Zahl linear unabhängiger aus. Gehören so zu $\Gamma^{(i)}$ die Systeme

$$\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_i^{(i)},$$

*) Frobenius: Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe, Berliner Sitzungsberichte 1899, S. 330.

so ist das allgemeinste System, das beim Übergang zu den Konjugierten die Gruppe $\Gamma^{(i)}$ erfährt, und dessen Zahlen Ausdrücke von höchstens zweitem Grad in $\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}$ sind, gegeben durch den Ausdruck:

$$a_1 \xi_1^{(i)} + \dots + a_i \xi_i^{(i)}.$$

Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen für $\Gamma^3, \dots, \Gamma^d$ und jeweils die neuen von den früheren unabhängigen Systeme herausgreifen, so müssen wir für jede Gruppe $\Gamma^{(i)}$ genau so viele unabhängige Systeme erhalten, als der Grad der Darstellung beträgt, und die Determinante dieser Systeme ist daher von 0 verschieden. Wir wollen diese so gefundenen Systeme mit $\eta_{ik}^{(i)}$ bezeichnen. Sie lassen sich also sofort hinschreiben, wenn das gruppentheoretische Problem der vollständigen Reduktion von Γ^i gelöst ist.

Nun sei ξ_1, \dots, ξ_m ein beliebiges System, welches zu Γ gehört. Um zunächst dieses System durch die Größen $\xi_{11}, \dots, \xi_{1m}$ auszudrücken, haben wir bloß die zu Γ konjugierte Gruppe heranzuziehen und die dazu gehörige Matrix (η_{ik}) . Die Ausdrücke

$$\eta_{i1} \xi_1 + \eta_{i2} \xi_2 + \dots + \eta_{im} \xi_m = \rho_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

verändern sich nicht beim Übergang zu den Konjugierten, weil die ξ und die η kontragrediente Variable sind und der obige bilineare Ausdruck eine Invariante zweier solcher Variablenreihen darstellt. Die Größen ρ_i können daher berechnet werden und gehören dem Grundkörper an. Durch Auflösung der Gleichungen erhält man ξ_1, \dots, ξ_m ausgedrückt als Funktionen der Größen η_{ik} und ρ .

Ein Teil des gruppentheoretischen Satzes, der diesem Verfahren zugrunde liegt, ist bereits von Burnside*) auf anderem Wege bewiesen. Wir bemerken zum Schluß noch, daß bei dieser Reduktion auch die Invarianten der Substitutionsgruppe Γ auftreten, als diejenigen Funktionen, die beim Übergang zu den Konjugierten die Gruppe $\Gamma^{(1)}$ erfahren.

§ 5.

Gruppendeterminante und Körperdiskriminante.

Für den algebraischen und funktionentheoretischen Teil wird es im allgemeinen genügen, aus einem einzigen Formenproblem die zugehörigen Größen ξ zu berechnen und man wird dazu dasjenige vom geringsten Grade benutzen, d. h. man wird das Gleichungsproblem auf ein solches mit möglichst wenig Parametern reduzieren. Ja man erweitert sogar noch den Körper, da es sich herausstellt, daß sich für umfassendere Gruppen oft Darstellungen von niedrigerem Grad finden lassen.**)

*) Burnside, Theory of groups of finite order, 2 ed. S. 299.

**) Anmerkung. Beim Ikosaeder geht man so zu einer Gruppe von der Ordnung 120 über und hätte, wie man leicht erkennt, die Quadratwurzel aus einer Zahl

Das Quadrat der Determinante:

$$|\omega_{F^{-1}Q}| \quad (P, Q = E, A, B, \dots)$$

oder kurz

$$|\omega_{F^{-1}Q}|^2_{\mathfrak{G}}$$

ist die Diskriminante der g Zahlen

$$\omega_E, \omega_A, \omega_B, \dots$$

denn die erste Spalte enthält diese g Zahlen, während die übrigen Spalten die Permutationen nach der Galoisschen Gruppe, d. h. die konjugierten Spalten, sind.

Setzen wir die Determinante der Matrix $M(\omega)$ in § 1 = $\Phi(\omega)$, und bezeichnen wir mit $\Phi_1(\omega), \Phi_2(\omega), \dots, \Phi_r(\omega)$ die verschiedenen Determinanten, welche in dieser Weise zu den irreduzibeln Darstellungen der Gruppe gehören, dann wird:*)

$$|\omega_{F^{-1}Q}|_{\mathfrak{G}} = \prod_{i=1}^r \Phi_i^{\chi_i}(\omega)$$

wobei wieder χ_i den Grad der Darstellung bedeutet, zu der $\Phi_i(\omega)$ gehört. Wenn ω eine ganze Zahl des Körpers K ist, so ist das Quadrat dieser Determinante stets durch die Körperdiskriminante teilbar, doch werden im allgemeinen noch weitere, allen diesen Zahlen gemeinsame „außerwesentliche“ Teiler auftreten.

Zunächst betrachten wir die Gruppendeterminante

$$\Phi(\omega) = |\xi_{ik}|$$

und bestimmen die gemeinsamen Teiler aller Zahlen ξ_{ik} , wobei ω alle ganzen Zahlen des Galoisschen Körpers K durchläuft. Nach den Resultaten von Herrn I. Schur**) lassen sich alle endlichen Substitutionsgruppen in solche mit ganzen algebraischen Koeffizienten transformieren. Im folgenden setzen wir stets die Gruppe als ganzzahlig voraus, dann sind die Größen ξ_{ik} stets ganze algebraische Zahlen. Zunächst gilt der

Satz 6: *Der gemeinsame Teiler der Zahlen $\xi_{11}(\omega)$, wobei ω alle ganzen Zahlen von K durchläuft, ist in der Wurzel aus der Körperdiskriminante enthalten.*

eines Unterkörpers sechsten Grades zu adjungieren, die so ausgewählt sein müßte, daß der neue Körper ebenfalls Galoissch ist. Doch geschieht das nicht, da beim Übergang zur gebrochenen Substitutionsgruppe diese Quadratwurzel wegen der besonderen Art der Gruppe (Darstellungsgruppe) von selbst wegfällt. Dagegen wird die Quadratwurzel aus einer Zahl des Grundkörpers, nämlich aus der Invariante $A_0^2 + A_1 A_2$ benutzt.

*) Frobenius: l. c.

**) I. Schur: Über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. 71, 8. 355.

Beweis: Sei $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen, so daß

$$\begin{aligned}\xi_{11}(\omega_1) &= \omega_1 + a_1, \omega_1' + \dots, \\ &\vdots \\ \xi_{11}(\omega_n) &= \omega_n + a_1, \omega_n' + \dots,\end{aligned}$$

dann folgt, indem man die Gleichungen der Reihe nach mit den Unterdeterminanten der ersten Spalte aus der Matrix:

$$\sqrt{D} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1' & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_n & \omega_n' & \dots \end{vmatrix}$$

multipliziert und addiert

$$\sqrt{D} = \xi_{11}(\omega_1)\Omega_1 + \dots + \xi_{11}(\omega_n)\Omega_n,$$

woraus der Satz folgt. Bezeichnet man den gemeinsamen Idealteiler der Größen $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ mit \mathfrak{b} , so erkennt man sofort, daß der gemeinsame Idealteiler der Zahlen $\xi_{11}(\omega)$ sogar in $\frac{\sqrt{D}}{\mathfrak{b}}$ enthalten sein muß.

Wir müssen nun die Hilbertschen Begriffe des Trägheitskörpers und des Verzweigungskörpers*) heranziehen. Die Trägheitsgruppe eines Diskriminantenteilers \mathfrak{P} besteht aus allen denjenigen Substitutionen, für welche die Kongruenz besteht:

$$\omega \equiv \omega_s \pmod{\mathfrak{P}},$$

für alle ganze Zahlen des Körpers. Sei \mathfrak{T} diese Gruppe und

$$\sum_{\mathfrak{T}} S = H_{\mathfrak{T}},$$

setzen wir ferner

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} + A_2 \mathfrak{T} + \dots$$

dann wird:

$$M(\omega) \equiv H_{\mathfrak{T}} \omega_E + A_2 H_{\mathfrak{T}} \omega_{A_2} + \dots \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Wenn \mathfrak{T} in unserer Darstellung die identische Darstellung nicht enthält, so wird $H_{\mathfrak{T}} = (0)$ und es gilt die Kongruenz:

$$\xi_{ik} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Die Verzweigungsgruppe \mathfrak{B} besteht aus denjenigen Substitutionen, für die $\omega \equiv \omega_s \pmod{\mathfrak{P}^2}$ ist, wenn ω alle ganzen Zahlen durchläuft. Sei \mathfrak{L} die höchste Potenz von \mathfrak{P} , für welche die nämlichen Kongruenzen gelten. Wenn dann die Verzweigungsgruppe in der betrachteten Darstellung die identische Darstellung nicht enthält, so folgt wie oben, daß die Zahlen ξ_{ik} sämtlich durch \mathfrak{P}^2 teilbar sind. Indem man in dieser Weise fortfährt und für den i mal überstrichenen Verzweigungskörper die entsprechende Zahl mit $\mathfrak{L}^{(i)}$ bezeichnet, folgt der

*) Hilbert: Jahresbericht der D. Math.-Ver. Bd. 4, S. 251.

Satz 7: Wenn die *imal überstrichene* Verzweigungsgruppe in der Darstellung Γ die identische Darstellung nicht enthält, so sind die Zahlen ξ_{ik} durch $\mathfrak{P}^{(i)}$ teilbar, sowie ferner durch die sämtlichen dazu konjugierten Ideale.

Der letzte Teil dieses Satzes folgt daraus, daß die Verzweigungsgruppen der zu \mathfrak{P} konjugierten Ideale konjugierte Gruppen sind, deren vollständige Zerlegung stets dieselbe ist.

§ 6.

Die Diskriminanten der Unterkörper.

Das Quadrat der Determinante

$$|\omega_{F^{-1}Q}|_{\mathfrak{G}}$$

ist gleich der Körperdiskriminante, wenn $\omega_E, \omega_A, \dots$ eine Basis der ganzen Zahlen des Körpers ist. Eine solche Basis bezeichnen wir als eine Normalbasis und wir wollen unter der Voraussetzung, daß der Körper eine solche besitzt, die Zahlen $\Phi(\omega)$ untersuchen.

Aus der Existenz einer Normalbasis folgt sofort, daß der Verzweigungskörper jedes Primteilers \mathfrak{P} der Diskriminante der Körper K selbst ist. Denn zunächst ist offenbar

$$\sum_{\mathfrak{G}} \omega_S = \pm 1$$

ferner ist die Verzweigungsgruppe \mathfrak{B} von der Ordnung p^r , wobei p die durch \mathfrak{P} teilbare Primzahl ist, und es gelten die Kongruenzen für jede Zahl α von K :

$$\alpha \equiv \alpha_V \pmod{\mathfrak{P}} \quad (V \text{ in } \mathfrak{B}).$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + S_2 \mathfrak{B} + \dots \quad \text{und} \quad S_1 = E,$$

so folgt:

$$\sum_{\mathfrak{G}} \omega_{S_i V} \equiv p^r \omega_{S_i} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

daher

$$\sum_{\mathfrak{G}} \omega_S \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}},$$

was einen Widerspruch ergibt.

Ist ein Unterkörper gegeben, der zur Untergruppe \mathfrak{H} gehört, und setzt man

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + T_2 \mathfrak{H} + \dots$$

so bilden die Zahlen

$$\sum_{\mathfrak{G}} \omega_{T_i H} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

eine Basis der ganzen Zahlen des Unterkörpers, und die Diskriminante dieses Körpers ist daher das Quadrat der Determinante:

$$(1) \quad \left| \sum_{\mathfrak{G}} \omega_{T_i H T_k^{-1}} \right|_{ik}.$$

Diese Determinante läßt sich aber darstellen als Produkt aus irreduzibeln Gruppendeterminanten $\Phi(\omega)$:

$$\left| \sum_{\mathfrak{G}} \omega_{T_i H T_k^{-1}} \right| = \prod_l \Phi_l^{h_l}(\omega),$$

wobei h_l angibt, wie oft die Untergruppe \mathfrak{H} in der durch den Index l bezeichneten irreduzibeln Darstellung von \mathfrak{G} die identische Darstellung enthält.*) Daraus folgt der

Satz 8: Die Diskriminante eines Unterkörpers setzt sich bei Körpern mit Normalbasis in einer allein durch die Gruppe bestimmten Weise aus den Zahlen $\Phi(\omega)$ zusammen.

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Die Gruppendeterminante Φ besitzt Koeffizienten aus dem durch den Charakter bestimmten Kreiskörper und die sämtlichen konjugierten Funktionen Φ', \dots sind wiederum irreduzible Gruppendeterminanten. Die Determinante (1) muß nun jede dieser konjugierten Determinanten in derselben Potenz enthalten und wir wollen daher die Potenz von p berechnen, die in dem Produkt von $\Phi(\omega)$ mit den konjugierten Zahlen $\Phi'(\omega), \dots$ aufgeht.

Sei

$$\Phi(\omega) \Phi'(\omega) \dots = \Psi(\omega),$$

dann sind die Determinanten der Matrizen der Ψ entsprechenden Darstellung von \mathfrak{G} :

$$\Gamma + \Gamma' + \dots$$

sämtlich ± 1 . Daher wird $\Psi^2(\omega)$ eine ganze rationale Zahl.

Sei \mathfrak{P} ein Primteiler der Diskriminante und \mathfrak{L} die zugehörige Trägheitsgruppe mit der Ordnung h . Man beweist nun leicht, daß die Relativdiskriminante von K in bezug auf den Trägheitskörper das gemeinsame Ideal aller Diskriminanten von der Gestalt

$$|\omega_{F^{-1}Q}|_{\mathfrak{L}}^2$$

ist. Sei ω speziell so gewählt, daß das Primideal in der niedrigsten Potenz vorkommt, die möglich ist, nämlich in der $h(h-1)^{\text{ten}}$.**) Nun ist die Trägheitsgruppe zyklisch. Ihr erzeugendes Element sei T . Dann kann man $|\omega_{F^{-1}Q}|_{\mathfrak{L}}$ zerlegen in das Produkt der Lagrangeschen Resolventen:

$$\prod_{i=1}^h (\omega_E + \varepsilon^i \omega_T + \varepsilon^{2i} \omega_{T^2} + \dots + \varepsilon^{(h-1)i} \omega_{T^{h-1}}).$$

*) Burnside: Theory of groups, S. 275.

**) Weber, Algebra, 2. Aufl. Bd. 2, S. 670.

p wird im Körper der h^{ten} Einheitswurzeln in eine gewisse Anzahl e verschiedener Primideale zerfallen, wobei e ein Teiler von $\varphi(h)$ ist.*) Das Primideal \mathfrak{P} zerfällt dann in dieselbe Anzahl verschiedener Ideale. Bezeichnet man den Ausdruck

$$\omega_E + \varepsilon \omega_T + \dots + \varepsilon^{h-1} \omega_{T^{h-1}} \quad \text{mit } \xi_1$$

und ersetzt man der Reihe nach ε durch $\varepsilon^r, \varepsilon^{r^2}, \dots$, wobei r eine Primitivzahl nach h bedeutet, so erhält man $\varphi(h)$ Zahlen:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\varphi(h)}.$$

Sei

$$\xi_1 = \mathfrak{P}_0^{a_0} \mathfrak{P}_1^{a_1} \dots \mathfrak{P}_{e-1}^{a_{e-1}} \Omega,$$

wobei Ω prim ist zu \mathfrak{P} , so erhält man die weiteren Größen $\xi_2 \dots$ durch zyklische Permutation der \mathfrak{P} und entsprechender Veränderung von Ω :

$$\xi_2 = \mathfrak{P}_1^{a_0} \mathfrak{P}_2^{a_1} \dots \mathfrak{P}_0^{a_{e-1}} \Omega'$$

$\xi_1^{r'}$ ist eine Zahl des Trägkeitskörpers, dem ε adjungiert ist. Daher muß sein

$$r a_{i+1} \equiv a_i (h)$$

also wird

$$(2) \quad a_i \equiv r'^i a_0 (h). \quad (r \cdot r' \equiv 1 (h))$$

In $\prod_{i=1}^{\varphi(h)} \xi_i$ geht dann \mathfrak{P}_0 zur $\frac{\varphi(h)}{e} (a_0 + a_1 + \dots + a_{e-1})^{\text{ten}}$ Potenz auf.***) Die kleinste mögliche Zahl für diese Potenz ist aber, wie man sofort aus der Gleichung (2) folgert, gleich $h \frac{\varphi(h)}{2}$.

Nun möge ε eine primitive h_1^{te} Einheitswurzel sein, während $h = h_1 \cdot \bar{h}$ ist. Dann beweist man genau so, wie oben, daß $\mathfrak{P}^{\bar{h}}$ mindestens in der Potenz $h_1 \frac{\varphi(h_1)}{2}$ im Produkt der zu einer Faktorgruppe gehörenden Lagrange'schen Resolvente

$$\omega_E + \varepsilon \omega_T + \dots$$

aufgeht. Das Produkt aller so entstehenden Resolventen gibt die Wurzel aus der Relativediskriminante der Zahlen $\omega_E, \omega_T, \dots, \omega_{T^{h-1}}$ in bezug auf den Trägkeitskörper. Die Relativediskriminante selbst ist daher mindestens durch die $h \cdot \sum_i \varphi(h_i)^{\text{te}}$ Potenz von \mathfrak{P} teilbar, wobei h_i alle Teiler von h durchläuft, außer der Zahl 1. Nun ist

$$\sum \varphi(h_i) = h - 1.$$

*) Vgl. darüber Fueter: Theorie der Zahlstrahlen, Crelles Journ. 130, S. 197.

**) Vgl. hierzu Hilbert, I. c., S. 351—359.

$h(h-1)$ ist aber die genaue Zahl, die angibt, wie oft \mathfrak{P} in der Relativediskriminante aufgeht. Wir transformieren jetzt die Gruppe $\Gamma + \Gamma' + \dots$ dergestalt, daß die Trägheitsgruppe vollständig reduziert erscheint. Den hierbei im allgemeinen auftretenden Nenner nehmen wir als zu p prim an. Dann wird die Matrix

$$\sum_{i=1}^h T^i \omega_{T^i} = M_{\mathfrak{X}}(\omega)$$

eine Diagonalmatrix, deren Koeffizienten in der Hauptdiagonalen Lagrange'sche Resolventen sind. Die Matrix

$$S \cdot M_{\mathfrak{X}}(\omega_S),$$

wobei S eine beliebige Substitution der Gruppe \mathcal{G} bedeutet, ist nun eine Matrix, die in der i^{ten} Spalte lauter Koeffizienten besitzt, welche die Ideale $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots$ in mindestens derselben Potenz enthalten, wie die i^{te} Spalte in $M_{\mathfrak{X}}(\omega)$. Daraus folgt sofort

Satz 9: Wenn die Darstellung $\Gamma + \Gamma' + \dots$ das System der mit der Faktorgruppe von der Ordnung h , homomorphen Darstellungen der Trägheitsgruppe genau g_i mal enthält, so ist $\Psi(\omega)$ genau durch die $\frac{1}{2} h \sum' g_i \varphi(h_i)^{10}$ Potenz von \mathfrak{P} und von allen zu \mathfrak{P} konjugierten Primidealen, also genau durch die $\frac{1}{2} \sum' g_i \varphi(h_i)^{10}$ Potenz von p teilbar. Dabei ist also der Teiler 1 von h wegzulassen.

Diese Potenz wollen wir für die verschiedenen Darstellungen mit b_k bezeichnen. Wenn dann ein irreduzibler Bestandteil von Ψ_k die identische Darstellung der Untergruppe genau c_k mal enthält, so ist Ψ_k in der Diskriminante des Unterkörpers genau zur $2c_k^{\text{ten}}$ Potenz enthalten. Daher geht p in der Diskriminante zur $2 \sum b_k c_k^{\text{ten}}$ Potenz auf.

Indem man diese Berechnung des Exponenten mit anderen vergleicht, so ergeben sich interessante, aus der Gruppentheorie bekannte Beziehungen, von denen wir die einfachste, für den Fall daß h eine ungerade Primzahl ist, ableiten wollen.

Sei \mathfrak{R} der Normalisator der Trägheitsgruppe, r der Index der Zerlegungsgruppe unter diesem Normalisator, f derjenige der Trägheitsgruppe unter der Zerlegungsgruppe, dann ist die Trägheitsgruppe noch für $r-1$ zu \mathfrak{P} konjugierte Ideale Trägheitsgruppe. Die Relativediskriminante von K in bezug auf den Trägheitskörper ist daher genau durch die $(h-1)^{10}$ Potenz von $\mathfrak{P}^h = \mathfrak{p}$ und von $(r-1)$ dazu konjugierten Primidealen teilbar, während die weiteren Faktoren zu p prim sind. Die Norm der Relativediskriminante, genommen im Trägheitskörper, ist hiernach genau durch

$p^{f(r(h-1))}$ teilbar. fr ist aber der Index der Trägheitsgruppe unter dem Normalisator. Ferner ist die Körperdiskriminante genau durch die $\frac{N}{h}(h-1)^{10}$ Potenz von p teilbar. Daher wird die Diskriminante des Trägheitskörpers genau durch die

$$\frac{1}{h} \left\{ \frac{N}{h} (h-1) - fr(h-1) \right\}^{10}$$

Potenz von p teilbar. Dagegen folgt aus unserer Berechnung für diese Potenz die Zahl:

$$\frac{1}{h-1} \left(\frac{N}{h} - \sum c_k^2 \right) (h-1)$$

und durch Gleichsetzung erhält man

$$h \cdot \sum c_k^2 = \frac{N}{h} + fr(h-1).$$

Setzen wir $\frac{N}{h} = fr + s$, so lautet die Gleichung jetzt:

$$\sum c_k^2 = fr + \frac{s}{h}$$

und rechts steht offenbar die Anzahl der unter der Trägheitsgruppe invarianten Komplexe von Nebengruppen der Trägheitsgruppe. Die im Normalisator enthaltenen Nebengruppen sind nämlich invariant unter \mathfrak{I} , von den anderen ergeben je h zusammengenommen einen invarianten Komplex. Die Vergleichung der beiden Resultate führt also auf den bekannten Satz, daß $\sum c_k^2$ gleich der Anzahl der unter \mathfrak{I} invarianten Systeme von Nebengruppen von \mathfrak{I} ist.

Schließlich bleibt noch übrig, die Zahl $\Psi(\omega)$ in ihre Faktoren $\Phi(\omega)$, $\Phi'(\omega)$, ... zu zerlegen. Dieses Problem läuft darauf hinaus, die gemeinsamen Teiler für die einzelnen Lagrangeschen Resolventen zu bestimmen. Zu jeder in Γ enthaltenen irreduziblen Darstellung der Trägheitsgruppe gehört in dieser Weise ein bestimmtes Ideal und $\Phi(\omega)$ ist durch das Produkt dieser Ideale teilbar. Jeder Faktor der Diskriminante läßt sich in dieser Weise bestimmen.

Karlsruhe, Juli 1915.

Ein direkter Beweis für die Normalform der komplexen Zahlensysteme.

Von

GUIDO VOGHERA in Triest.

Für die Klassifizierung der assoziativen komplexen Zahlensysteme ist es von großer Wichtigkeit, dieselben auf eine einfache Normalform reduzieren zu können, aus welcher man unmittelbar die Unterschiede zwischen den verschiedenen Typen beurteilen kann. Eine solche Normalform wurde bekanntlich für die allgemeinen Systeme zuerst von Molien angegeben. Spezialfälle waren schon früher von Peirce und Scheffers betrachtet worden. Später wurde die Normalform von Cartan und von Hawkes noch weiter entwickelt.

In meiner Doktordissertation*) habe ich versucht die Normalform auch auf die nullpotenten Systeme auszudehnen, indem ich die Einteilung in Gruppen eingeführt habe (S. 272—273). So ist es mir gelungen einen ziemlich klaren Einblick in den Aufbau dieser, bis damals etwas vernachlässigten Systeme, zu gewinnen.***) Im „Nachtrage“ (Diss. S. 319—323)

*) „Zusammenstellung der irreduziblen komplexen Zahlensysteme in sechs Einheiten“, abgedruckt im 54. Bande der Denkschriften der math.-naturw. Klasse der K. Akademie der Wissensch. zu Wien, 1908, S. 269—328. — Diesen Aufsatz werde ich von nun an mit „Diss. S. x “ zitieren. — Für die übrige Literatur beziehe ich mich auf die Angaben von J. A. Schouten „Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme“, Math. Ann. 76 (1914), S. 1—66. — Diese Arbeit wird im folgenden mit „Schouten S. x “ angeführt.

**) Es können aber nicht alle nullfaktorialen Systeme als ein nullpotentes Unter-system eines Nichtquaternionsystems mit mehr als einer Haupteinheit verwendet werden. Die Auffindung der nullfaktorialen Systeme, die bei gegebener Hauptreihe zu diesem Zwecke angewandt werden können, bildet jetzt die wichtigste Aufgabe der Theorie, da die allgemeinen Systeme auf Nichtquaternionsysteme zurückgeführt worden sind, und diese, wenn einmal die Charaktereneinteilung gegeben ist, auf die nullpotenten Nebensysteme reduziert sind. Die Gruppeneinteilung (Diss. S. 325—326) sollte in dieser Richtung alles sicher bis jetzt gewonnene zum Ausdruck bringen. (Vgl. die diesbezügliche Meinung von Shaw — Schouten S. 58, Anm. — und weiter

habe ich eine strenge Darstellung der Einteilung der Zahlen des komplexen Systems nach Charakteren in bezug auf eine Reihe idempotenter und untereinander nilfaktorierender Einheiten gegeben.*) Auf diese beiden Resultate werde ich mich im folgenden beziehen. —

Dasselbst (Diss. S. 56) habe ich auch die Aufgabe gestellt, den Beweis für die Möglichkeit der Normalform auf rein direktem Wege zu leisten. Darunter will ich verstehen, daß man zum Beweise die Zahlen des Systems selbst benützt, und nur die für sie bei der Definition postulierten Eigenschaften — Assoziativität, Kommutativität der Addition, Distributivität mit der Multiplikation und Assoziativität der Multiplikation selbst, — und die entsprechenden einfachen arithmetischen Operationen zwischen den Koeffizienten anwenden muß, und nicht das System als ganzes mit anderen, seiner Definition fremden Theorien in Beziehung setzen (Transformationsgruppentheorie, Matrizenrechnung) und dann die aus diesen Betrachtungen gewonnenen Resultate, wieder auf das System übertragen, noch — wie bei der Taberschen Beweisführung mittels des Skalars (Schouten a. S. 3 a. O.) — mit neuen Funktionen der Koeffizienten, die eine entferntere Beziehung mit den Zahlen des Systems haben, operieren, und aus diesen Funktionen selbst wieder auf die Eigenschaften dieser Zahlen Schlüsse ziehen darf.

von demselben Verfasser „Bull. of the intern. Ass. for promoting the study of Quaternions and allied Systems of mathem.“ Juni 1906, S. 56.)

Die Hawkesche Methode — Schouten S. 36 — die zur Aufstellung aller Nicht-quaternionssysteme dienen soll, geht nicht viel über die Aufstellung der Tabelle nach den Charakteren hinaus. Über das nilfaktorierende Nebensystem gibt sie aber, bei komplizierteren Fällen, fast keinen Anhaltspunkt, da man nicht, falls eine Reihe allgemeiner Parameter vorkommt, ohne andere Unterannahmen zu machen, die Einheiten herausfinden kann, die zur ersten und zur letzten Gruppe gehören. Eine Kritik davon habe ich schon in Diss. S. 289 gegeben. Nun bemerke ich aber, daß auch Theorem VI — Schouten, a. S. 3 drittangeg. O. S. 369 — nicht richtig ist, wie man aus dem System der Quaternionen durch Weglassung von e_{11} ersehen kann. Das resultierende System ist nicht assoziativ. — Hieraus haben sich aber zwei weitere unrichtige Tabellen ergeben: die Systeme $1_1 \cdot 1$ und $2_2 \cdot 1$ sind nicht assoziativ, das erste in $e_2 e_2 e_2$, das zweite in $e_2 e_2 e_2$. Diese habe ich auch in meiner Dissertation wiedergegeben: VI₁₂₄ und VI₁₃₀ sind zu streichen.

*) Von der Möglichkeit dieser Einteilung liegen noch zwei direkte (s. unten) Beweise vor. Der erste von Hawkes (s. Schouten, S. 17 Anm.), der zweite von Schouten selbst (Schouten S. 15—17). Der erste muß in der Weise ergänzt werden, daß man ihn als einen Schluß von n auf $n+1$ Einheiten betrachtet. Der zweite ist in etwas allzu knapper Form gehalten: es wird nicht ausdrücklich hervorgehoben, daß die vier betrachteten Operatoren in bezug auf verschiedene Einheiten der Hauptreihe kommutativ sind, so daß die Reihenfolge der Einheiten einer bestimmten Reihe belanglos ist, und daß die Resultate der Charaktereneinteilung untereinander linear unabhängig sind.

Ich werde hier weiter einen einfachen, bis auf einen Punkt, wo von dem Hauptsatz der Algebra Gebrauch gemacht wird, im obigen Sinne *direkten* Beweis darbringen. Daß hierin nicht alles neu ist, ergibt sich von selbst; der Beweis des Hauptsatzes, welcher eigentlich den Kern der ganzen Sache bildet, ist aber vollständig originell, und es ist der einzige direkte Beweis, der bis jetzt gegeben worden ist. (Schouten S. 19—20.)

Die Normalform der Systeme.

Satz: Jedes assoziative Zahlensystem mit Modul (S) läßt sich in der Weise aus einem anderen (Nichtquaternion-)Systeme (Σ) ableiten, daß die Einheiten von S^*)

$$e_{i_\alpha j_\beta}^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r,$$

$$i_\alpha = 1, 2, \dots, p_\alpha$$

$$p = \sum_1^r p_\alpha,$$

$$j_\beta = 1, 2, \dots, p_\beta$$

$$P = \sum_1^r p_\alpha^2,$$

$$x_{\alpha\beta} = 1, 2, \dots, n_{\alpha\beta}, \quad \text{für } \alpha \neq \beta$$

$$N = \sum_1^r p_\alpha p_\beta n_{\alpha\beta},$$

$$x_{\alpha\alpha} = 0, 1, 2, \dots, n_{\alpha\alpha}$$

$$M = P + N,$$

aus denen von Σ

$$e_{i_\alpha j_\beta}^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r$$

$$n = r,$$

$$x_{\alpha\beta} = 1, 2, \dots, n_{\alpha\beta}, \quad \text{für } \alpha \neq \beta$$

$$n = \sum_1^r n_{\alpha\beta}$$

$$x_{\alpha\alpha} = 0, 1, 2, \dots, n_{\alpha\alpha}$$

$$m = r + n,$$

durch die Gleichungen

$$e_{i_\alpha j_\beta}^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} = e_{i_\alpha 0}^{\alpha\alpha} \cdot e_{11}^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} \cdot e_{1j_\beta 0}^{\beta\beta}$$

hervorgehen, wobei festgesetzt wird

$$e_{i_\alpha j_\beta 0}^{\alpha\alpha} \cdot e_{i_\beta j_\beta 0}^{\beta\beta} \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \alpha \neq \beta \text{ oder } j_\alpha \neq j_\beta, \\ = e_{i_\alpha j_\beta 0}^{\alpha\beta}, & \text{wenn } \alpha = \beta \text{ und } j_\alpha = j_\beta. \end{cases}$$

Die Einheiten des Nichtquaternionensystems Σ

$$e_{i_\alpha j_\beta}^{\alpha\beta}, \quad x_{\alpha\alpha} \neq 0$$

*) Die Multiplikation der höheren komplexen Zahlen wird mit dem Punkte bezeichnet, während die Koeffizienten (gewöhnliche komplexe Zahlen) in den Formeln einfach vorangesetzt werden.

bilden ein nullpotentes invariantes Untersystem, für welches die Gruppeneinteilung (Diss. S. 272—273 und S. 325—326) gilt, d. h., man kann jeder solchen Einheit eine ganze Zahl g zuschreiben, so daß jedes Produkt von solchen Einheiten aus $g + 1$ Faktoren verschwindet, aber nicht jedes Produkt aus g Faktoren.

Dabei bedeutet:

- r die Anzahl der primitiven Systeme,
- p_α die Ordnung des α^{ten} Systems,
- $n_{\alpha\beta}$ die Anzahl der nullpotenten Nebeneinheiten, die zu einer bestimmten idempotenten Einheit des α^{ten} und einer bestimmten des β^{ten} Systems gehören,
- p die Anzahl der idempotenten Einheiten der Hauptreihe,
- P " " " Haupteinheiten (der primitiven Systeme),
- N " " " nullpotenten Nebeneinheiten,
- M " " " gesamten Einheiten,
- $\pi = r$ " " " idempotenten Einheiten des Nichtquaternionensystems,
- " " " " nullpotenten " " " "
- " " " " gesamten " " " "

Zum Beweise des allgemeinen Satzes über die Normalform, muß man vorher einen beschränkten Fall in Betracht ziehen. Wegen seiner Wichtigkeit nenne ich diesen den Hauptsatz (Schouten S. 19, Satz V). Er lautet:

Hauptsatz: In einem System mit nur einer idempotenten Einheit, dem Modul, kann man die anderen Einheiten so wählen, daß sie ein nullpotentes Untersystem bilden.

Für die Definition von nullpotenten (nullfaktorialen) Systemen s. Diss. S. 318—319.

Haben wir in der Tat eine nicht nullpotente Zahl eines allgemeinen Systems, so besteht zwischen $n + 1$ aufeinander folgenden Potenzen derselben gewiß eine lineare Beziehung, und umgekehrt ist, falls eine solche Beziehung existiert, die Zahl nicht nullpotent. Sei a eine solche Zahl und sei die erste lineare Beziehung, der ihre Potenzen genügen:

$$(1) \quad a^v + a_1 a^{v+1} + \dots + a_x a^{v+x} = 0 \quad a_x \neq 0,$$

wobei $a, a^2, a^3, \dots, a^{v+x-1}$ noch unabhängig sind und $v \geq 1, x \geq 1$. Ich setze

$$(2) \quad b + a_1 a + a_2 a^2 + \dots + a_x a^x = 0,$$

woraus durch Potenzierung des Ausdrucks von b und dadurch, daß mittels (1) die Potenzen von a , die höher sind als die $(v+x-1)^{\text{te}}$, eliminiert werden, folgt:

$$(3) \quad b^v + b_0 a^v + b_1 a^{v+1} + \dots + b_{x-1} a^{v+x-1} = 0;$$

und für jedes $\beta \geq 1$, $\alpha \geq 0$, wie man leicht aus (1) ersehen kann;

$$a^{r+\alpha} = b \cdot a^{r+\alpha} = a^{r+\alpha} \cdot b = a^{r+\alpha} \cdot b^\beta = b^\beta \cdot a^{r+\alpha}$$

und

$$b^\beta + 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 1$$

und ebenso

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{r+\alpha} \cdot b^{\beta} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} b^{\beta} \cdot a^{r+\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{r+\alpha}.$$

Da aber b^r eine Vielfachsumme von Potenzen von a ist, die gewiß höher sind als die $(\nu - 1)^{\text{te}}$, gesetzt

$$(4) \quad b^r = \eta + 0,$$

so folgt im speziellen für $\beta = \nu$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{r+\alpha} \cdot \eta = \eta \cdot \sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{r+\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{r+\alpha}$$

und

$$(5) \quad \eta^2 = \eta.$$

Wenn wir nun annehmen, daß im Systeme nur eine idempotente Einheit existiert, so ist sie notwendig der Modul und es ist

$$\eta \cdot a = a \cdot \eta = a$$

und folglich aus (3)

$$(6) \quad a + b_0 a^{r+1} + b_1 a^{r+2} + \dots + b_{x-1} a^{r+x} = 0.$$

Da wir angenommen haben, daß (1) die erste lineare Beziehung zwischen den nachfolgenden Potenzen des a ist, so muß identisch (1) gleich (6) sein, und insbesondere

$$(7) \quad \nu = 1, \quad b = \eta, \quad \eta + a_1 a + a_2 a^2 + \dots + a_x a^x = 0.$$

$\eta, a, a^2, \dots, a^{x-1}$ sind linear unabhängig, und falls $c = a - x\eta$ gesetzt wird, sind auch $\eta, c, c^2, \dots, c^{x-1}$ für jeden Wert des x linear unabhängig und von 0 verschieden.

Es ist weiter aus (7)

$$(8) \quad \eta + a_1(c + x\eta) + a_2(c + x\eta)^2 + \dots + a_x(c + x\eta)^x = 0$$

für jedes x . Wenn ich nun den Wert α als Wurzel der Gleichung

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_x x^x = 0$$

bestimme, was nach dem Hauptsatze der Algebra immer möglich ist, bekomme ich, da η in (8) ausfällt, eine Beziehung zwischen den Potenzen von c bis c^x , etwa

$$(9) \quad c_1 c + c_2 c^2 + \dots + c_{x-1} c^{x-1} + a_x c^x = 0.$$

Wäre nun ein $c_x \neq 0$, so würde c nicht nullpotent sein, und wenn wir für c dieselbe Schlußreihe wiederholen würden, die wir für a durchgemacht haben, und bedenken, daß es nur ein η im Systeme gibt, könnten wir analog zu (7) schließen

$$c_1 \eta + c_2 c + \dots + a_x c^{x-1} = 0,$$

was im Widerspruch mit der bewiesenen Unabhängigkeit dieser x Zahlen steht. Es ist also $c_p = 0$ für alle p , und folglich

$$c^x = 0.$$

Es gehört also zu jeder Zahl a des Systems eine gewöhnliche Zahl α und ein niedrigster Exponent x , wofür, wenn wir setzen,

$$(10) \quad a' = a - \alpha \eta,$$

$$(11) \quad a'^x = 0.$$

a' will ich die *reduzierte* Zahl von a nennen. Zu einer Zahl kann es nur eine reduzierte geben, denn zwei verschiedene Gleichungen (11) würden, mittels (10), eine lineare Beziehung zwischen a, a^2, \dots, a^x ergeben. Die obige Gleichung für x hat also notwendig alle Wurzeln gleich. Wenn, und nur wenn a nullpotent ist, ist $\alpha = 0$, also die Zahl gleich ihrer reduzierten. Die Gleichung (1) wird für unsere speziellen Systeme

$$a \cdot a'^x = a'^x \cdot a = 0.$$

Sind m Zahlen a_1, a_2, \dots, a_m und η linear unabhängig, so sind auch die reduzierten Zahlen a'_1, a'_2, \dots, a'_m linear unabhängig.

Wenn wir nun eine nullpotente Zahl des Systems herauswählen und alle ihre Produkte ins Auge fassen, so sind sie auch nullpotent. Denn sei $a^{i+1} = 0$, während noch $a^i \neq 0$; wäre z. B. das linksseitige Produkt $a \cdot b$ nicht nullpotent, so würde für seine reduzierte Zahl die Gleichung gelten:

$$(a \cdot b + \alpha \eta)^x = 0,$$

und durch linksseitige Multiplikation mit a^i erhalten wir

$$a^i = 0.$$

Ich beweise nun folgenden an sich interessanten

Hilfssatz 1. Wählen wir in einem Systeme m Zahlen heraus, welche die Eigenschaft haben, daß ihre sämtlichen (es genügt auch nur rechts- oder nur linksseitigen) Produkte mit allen anderen Zahlen des Systems nullpotent sind, und betrachten wir alle Produkte, die nur aus diesen Zahlen gebildet sind (indem die Zahlen selbst, als Produkte mit nur einem Faktor, auch mit inbegriffen sind), so verschwinden alle solche Produkte von mehr als n Faktoren und diese Produkte bilden samt allen ihren linearen Zusammensetzungen ein nullpotentes Untersystem des gegebenen Systems.

Der Beweis, daß alle $n + 1$ -gliedrigen Produkte verschwinden, ist eine naheliegende Verallgemeinerung der bekannten Frobeniusschen Schlußweise (Diss. S. 318).

Nehmen wir an, daß ein Produkt aus $n + 1$ Zahlen nicht Null sei, und betrachten wir die nacheinander folgenden Produkte:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 \cdot a_2, \quad b_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \quad \dots, \quad b_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n+1}.$$

Zwischen diesen muß eine lineare Beziehung bestehen:

$$-b_r + \beta_1 b_{r+1} + \beta_2 b_{r+2} + \dots + \beta_{n+1-r} b_{n+1} = 0$$

oder

$$b_r = b_r \cdot (\beta_1 a_{r+1} + \beta_2 a_{r+1} \cdot a_{r+2} + \dots + \beta_{n+1-r} a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \dots \cdot a_{n+1}) = b_r \cdot a.$$

Wenn wir aber a^2 bilden, so muß es als Vorfaktor a_{r+1} enthalten.

$$a^2 = a_{r+1} \cdot b = c$$

ist also nullpotent. Aber

$$b_r = b_r \cdot a = b_r \cdot a^2 = b_r \cdot c = b_r \cdot c^a = 0 \quad a \geq 1.$$

Also auch $b_{n+1} = 0$, im Widerspruche mit der Voraussetzung.

Der zweite Teil des Beweises ergibt sich aus der Möglichkeit der Gruppeneinteilung laut Diss. S. 272—273, da diese als einzige Voraussetzung das Verschwinden aller Produkte von mehr als n Faktoren benützt. Unter allen bisher betrachteten Produkten wählen wir eine vollständige Reihe linear unabhängiger Zahlen heraus: e_1, e_2, \dots, e_a . Ihre Produkte sind lineare Zusammensetzungen dieser Zahlen selbst. Unter allen linearen Zusammensetzungen von e_1, \dots, e_a kann man diejenigen herauswählen, die mit allen e_1, \dots, e_a multipliziert 0 ergeben, usw. nach dem bekannten Verfahren.

In dem Falle, der uns interessiert, bilden die reduzierten Zahlen des Systems mit einer idempotenten Einheit ein nullfaktorales Untersystem. Daß es genau $n-1$ Einheiten besitzt, folgt aus einer früheren Bemerkung. So ist der Hauptsatz bewiesen.

Weitere Regelung des Systems.

Unter den Zahlen entgegengesetzten Charakters ij und ji kann es welche geben, die, untereinander multipliziert eine nicht nullpotente Zahl ergeben. Sei ein solches Paar

$$(1) \quad x_{ij} \cdot x_{ji} = x_{ii} \quad \text{und setzen wir} \quad x_{ji} \cdot x_{ij} = x_{jj}.$$

Da x_{ii} nicht nullpotent ist, existiert ein α , so daß

$$(2) \quad (\alpha x_{ii} + \eta_i)^n = 0 \quad \text{oder} \quad \eta_i + \sum_{\lambda=1}^n \binom{n}{\lambda} \alpha^\lambda x_{ii}^\lambda = 0,$$

$$\eta_i = x_{ij} \cdot \left(- \sum_{\lambda=1}^n \binom{n}{\lambda} \alpha^\lambda x_{jj}^{\lambda-1} \right) \cdot x_{ji} = x_{ij} \cdot x'_{ji} = x'_{ij} \cdot x_{ji}.$$

Wenn man (2) links mit x_{ji} , rechts mit x_{ij} multipliziert, ergibt sich

$$(3) \quad x_{jj} + \sum_{\lambda=1}^n \binom{n}{\lambda} \alpha^\lambda x_{jj}^{\lambda+1} = 0 \quad \text{woraus} \quad \eta_j + \sum_{\lambda=1}^n \binom{n}{\lambda} \alpha^\lambda x_{jj}^\lambda = 0$$

oder

$$\eta_j = x_{ji} \cdot \left(- \sum_{\lambda=1}^n \binom{n}{\lambda} \alpha^\lambda x_{ii}^{\lambda-1} \right) \cdot x_{ij} - x'_{ji} \cdot x_{ij} = x_{ji} \cdot x'_{ij},$$

da

$$x'_{ii} \cdot x_{ij} = x_{ij} \cdot x'_{jj} \quad \text{und} \quad x'_{jj} \cdot x_{ji} = x_{ji} \cdot x'_{ii} \quad v \geq 1.$$

Ich setze nun:

$$x_{ij} = e_{ij}, \quad x'_{ji} = e_{ji}, \quad \eta_i = e_{ii}, \quad \eta_j = e_{jj}$$

und erhalte

$$(4) \quad e_{ii} = e_{ij} \cdot e_{ji}, \quad e_{jj} = e_{ji} \cdot e_{ij}.$$

Ich behalte nun i fest, und setze für j alle möglichen Werte j_1, j_2, \dots, j_p ; wofür eine Gleichung der Art wie (1) im Systeme zu finden möglich ist.

Ich erhalte also p Paare von Gleichungen (4). Gesetzt:

$$e_{j_\mu j_\lambda} = e_{j_\mu} \cdot e_{i j_\lambda} \neq 0;$$

wie durch Multiplikation rechts mit $e_{i j_\lambda}$ hervorgeht, befolgen diese Zahlen, wenn wir j_μ mit i identifizieren, die Multiplikationsregeln

$$e_{j_\mu j_\lambda} \cdot e_{j_\mu j_\nu} = e_{j_\mu j_\nu}, \quad \text{wenn} \quad j_\lambda = j_\mu \\ = 0, \quad \text{,,} \quad j_\lambda \neq j_\mu.$$

Es ist klar, daß in dieser Betrachtung sämtliche j_μ dieselbe Rolle spielen, so daß man zu demselben Resultate kommt, wenn man von irgend einem von ihnen ausgeht.

Ich führe nun für alle j Werte, die zu einer solchen Reihe gehören, einen gemeinsamen Index α ein und schreibe die so erhaltenen p_α Haupteinheiten des α^{ten} Primitivsystems

$$e_{i_\alpha j_\alpha}^{\alpha\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, r, \quad i_\alpha, j_\alpha = 1, 2, \dots, p_\alpha.$$

Von allen übrigen Zahlen des Systems nehme ich zuerst diejenigen heraus, die zu einer bestimmten idempotenten Einheit eines jeden primitiven Systems gehören, z. B. zu denjenigen, die beide unteren Indizes 1 haben. Diese Einheiten mögen sein

$$e_{11\alpha\beta}^{\alpha\beta} \quad \alpha_\beta = 1, 2, \dots, n_{\alpha\beta}.$$

Ist $\alpha = \beta$, so können diese neuen Nebeneinheiten nach dem Hauptsatz so gewählt werden, daß sie ein nullfaktoriales Untersystem bilden. Ist $\alpha \neq \beta$, so kann kein Produkt aus ihnen eine nicht nullpotente Zahl ergeben. Es kommt also in den Produkten aller neu eingeführten Einheiten keine idempotente Einheit vor; sie bilden also ein Untersystem. Um zu zeigen, daß dieses Untersystem nullfaktorial ist, beweise ich folgendes:

Hilfssatz 2. Wählen wir in einem Systeme m Zahlen heraus, welche einen einzigen Charakter haben, und die Eigenschaft haben, daß ihre sämtlichen (es genügt auch nur rechts- oder nur linksseitigen) Produkte geraden Charakters mit allen anderen Zahlen des Systems nullpotent sind, und betrachten wir alle Produkte die nur aus diesen Zahlen gebildet sind (indem die Zahlen selbst, als Produkte mit nur einem Faktor, auch mit inbegriffen sind), so bilden diese Produkte samt allen ihren linearen Zusammensetzungen ein nullpotentes Untersystem des gegebenen Systems.

Unter denselben Voraussetzungen wie bei Hilfssatz 1 folgt:

$$b_v = b_v \cdot a.$$

Da aber b_v als Produkt der Zahlen $a_1 \cdot a_2 \cdots a_v$, welche nur einen einzigen Charakter haben, ebenso nur einen Charakter hat, ist a geraden Charakters, und ebenso a^2 . Da letzteres a_{v+1} als Vorfaktor enthält, ist es nach der Voraussetzung nullpotent und man kann weiter dieselbe Schlußweise, wie beim ersten Hilfssatze anwenden.

Es folgt also, daß die zuletzt betrachteten nullpotenten Einheiten

$$e_{11\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta}$$

ein nullfaktoriales Untersystem darstellen*) und mit den zugehörigen idempotenten Einheiten bilden sie ein (Nichtquaternion-) Untersystem, welches nach Diss. S. 325–326 weiter behandelt werden kann.

Zu jeder Einheit dieses Nichtquaternionensystems (Σ) gehört aber eine, und nur eine Einheit des Charakters $i_{\alpha\beta}$, vermöge der Gleichung

$$e_{i_{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} = e_{i_{\alpha}10}^{\alpha\alpha} \cdot e_{11\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot e_{j_{\beta}0}^{\beta\beta};$$

so daß, wenn die Einheiten von (Σ) linear unabhängig oder abhängig sind, dasselbe von den entsprechenden Einheiten des allgemeinen Systems (S) gilt, und umgekehrt mittels der Gleichungen

$$e_{11\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} = e_{i_{\alpha}0}^{\alpha\alpha} \cdot e_{i_{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot e_{j_{\beta}10}^{\beta\beta}.$$

Die Produkte sämtlicher Einheiten von (S) sind aus denen von (Σ) eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} e_{i_{\alpha}j_{\beta}\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot e_{j_{\beta}i_{\gamma}\pi_{\beta\gamma}}^{\beta\gamma} &= e_{i_{\alpha}10}^{\alpha\alpha} \cdot e_{11\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot e_{j_{\beta}0}^{\beta\beta} \cdot e_{j_{\beta}10}^{\beta\beta} \cdot e_{11\pi_{\beta\gamma}}^{\beta\gamma} \cdot e_{i_{\gamma}0}^{\gamma\gamma} \\ &= e_{i_{\alpha}10}^{\alpha\alpha} \cdot e_{11\pi_{\alpha\beta}}^{\alpha\beta} \cdot e_{11\pi_{\beta\gamma}}^{\beta\gamma} \cdot e_{i_{\gamma}0}^{\gamma\gamma} = e_{i_{\alpha}10}^{\alpha\alpha} \cdot e_{11\pi_{\alpha\gamma}}^{\alpha\gamma} \cdot e_{i_{\gamma}0}^{\gamma\gamma} = e_{i_{\alpha}i_{\gamma}\pi_{\alpha\gamma}}^{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

*) Im entsprechenden Beweise des Theorems VIII (Schouten S. 24) fehlt dieser wichtige Schritt. Schouten beweist nämlich, daß die Nebeneinheiten nullpotent sind und ein Untersystem bilden, nicht aber, daß sie ein nullpotentes Untersystem bilden, das heißt, daß auch alle ihre linearen Zusammensetzungen nullpotent, respektive nullfaktorial sind.

angenommen, daß

$$e_{11\alpha\beta}^{\alpha\beta} \cdot e_{11\beta\gamma}^{\beta\gamma} = e_{11\alpha\gamma}^{\alpha\gamma}.$$

Die nullpotenten Nebeneinheiten bilden folglich auch für sich ein invariantes nullfaktoriales System. Somit ist der Satz über die Normalform bewiesen.*)

Wien, 21. September 1915.

*) Auch bei der *Regelung des Systems in bezug auf ein Hauptquadrat* (s. Schouten S. 24—25) vermißt man den Beweis, daß die Einteilung nach Gruppen mit derjenigen nach Charakteren sich verträgt (s. Diss. 325—326 für Nichtquaternionssysteme, und, nach dem im Text ausgeführten, auch für alle Systeme). Es könnte wohl möglich sein, daß man, wenn man versucht das Untersystem der Nebeneinheiten analog wie bei Theorem VI zu ordnen, gezwungen sein müßte, gemischte Charaktere einzuführen. Auch ist zu bemerken, daß die neue Ordnung nichts mit der alten Regelung der Einheiten geraden Charakters gemein hat. Es geschieht oft, daß man gezwungen ist, nicht nur die frühere Regelung ganz umzuordnen, sondern auch die Einheiten verschieden zu wählen. Z. B. kann eine Einheit geraden Charakters, welche mit allen Einheiten desselben Charakters nullfaktorial ist, in den Produkten mit den Einheiten anderer Charaktere Vielfachsummen von Einheiten aller möglichen früheren und späteren Gruppen enthalten, so daß sie bei der neuen Regelung nicht beibehalten werden kann.

Endlich bemerke ich, daß der Begriff der *durchgehenden Selbstisomorphie* (s. Schouten S. 27 u. ff., und besonders S. 35, Anm.) in meiner Dissertation (S. 327—28) schon eingeführt worden war, und daß mein Satz XIII, mit Theorem IX, S. 34 von Schouten, für den beschränkteren, aber bei weitem wichtigeren Falle der Nichtquaternionssysteme, übereinstimmt.

Teubners
Kriegstaschenbuch

Ein Handlexikon über den Weltkrieg
Heranagegeben von Ulrich Steindorff

III 5 Bänden. [VI u. 344 S.] 2. 1916

Gefest. II, 3.—, gebunden II, 3.50

gibt rasche und zuverlässige Auskunft in mehr als

5000 Stichworten

über alle politischen u. militärischen Ereignisse des Krieges,
über alle zu ihrem Verständnis notwendigen Fachausdrücke,
über alle Persönlichkeiten, die in ihm hervorgetreten sind,
über alle Ingredienzien mit dem Kriege in Zusammenhang stehenden
wirtschaftlichen und kulturellen Ereignisse und Maßnahmen,

im Deutschen Reich wie bei unseren Bundesgenossen,

insbesondere in Österreich-Ungarn und bei den Engländern.

Es gibt Auskunft über die wichtigsten Grundlagen des Wirtschaftslebens, des Finanz- und Steuerwesens, des Handels usw.,
ferner über die Rechtsverhältnisse der Mächte, Größe, Bevölkerung, über Kunst, Poesie, Wissenschaft und Handel, die politischen
Einrichtungen, diplomatische Beziehungen usw.

Die beigegebenen Seiten ermöglichen die rasche Auffindung aller Orte.

Es wird das Buch, das einzig in der Kriegsliteratur aller
Völker dastehen dürfte, unendlich wertvoll sein für
die verständnisvolle Verfolgung der

kommenden Friedensverhandlungen.

Verlag von G. E. Teubner in Leipzig und Berlin

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. Herausgeg. von F. Klein.

Soeben erschien: Band III. Heft 9

Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts

Von Prof. Dr. W. Lorey,

Direktor der öffentlichen Handelslehranstalt zu Leipzig

Mit 13 Abbildungen im Text u. auf 4 Tafeln u. einem Schlußwort zu Band III von F. Klein

[XVI u. ca. 440 S.] gr. 8. 1916. Geh. M 12.—, geb. M 14.—

Auf Grund eines Aktenstudiums und eingehender Besprechungen mit vielen Professoren der Mathematik, vor allen Dingen mit F. Klein, schildert der Verfasser die Entwicklung des mathematischen Universitätsunterrichts seit Anfang des 19. Jahrhunderts. An verschiedenen Stellen werden persönliche, eigens für diese Imuk-Abhandlungen niedergeschriebene Erinnerungen einzelner Mathematiker mit verwendet. So schildert der kürzlich verstorbene H. Weber seine Studienzeit in Heidelberg unter Hesse und Kirchhoff, in Leipzig unter Möbius und in Königsberg unter Richelot und F. Neumann.

Wenn auch, entsprechend der Aufgabe der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission, in erster Linie vom Standpunkte der Heranbildung mathematischer Lehrer für höhere Schulen geschrieben, geht diese Abhandlung doch auch auf die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft selbst ein, ohne deren Kenntnis ein richtiges Verständnis des Unterrichtswesens der Universität nicht möglich sein würde.

51

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

INHALT.

	Seite
Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. Von Dénes König in Budapest	453
Über die Starrheit konvexer Polyeder. Von M. Dehn in Breslau. (Mit 5 Figuren im Text)	466
Funktionen von beschränkter Schwankung in zwei reellen Veränderlichen. Von Walter Küstermann in Ann Arbor, Mich. U. S. A.	474
Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen. Von Otto Szász in Frankfurt a. M.	482
Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. Von Georg Pólya in Zürich	497
Zur Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen. Von Emil Hilb in Würzburg	514
Die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung. Von Emmy Noether in Göttingen	536
Gruppendeterminante und Körperdiskriminante. Von A. Speiser in Straßburg	546
Ein direkter Beweis für die Normalform der komplexen Zahlensysteme. Von Guido Voghera in Triest	563

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tünlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Hefen und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Hefen beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: F. Klein, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, W. v. Dyck, München, Hildegardstr. 5, David Hilbert, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, Otto Blumenthal, Aachen, Rütcherstraße 50.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtreaktion.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.

ite

53

66

74

82

97

14

36

46

63

—

see

on

ist

,

k-

io

on

n.

n,

n,

on.

ser